

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

NEIL FRANCO DE CARVALHO

**ESQUEMAS PARA CALCULAR A CONDUTIVIDADE TÉRMICA NAS FACES DE
VOLUMES FINITOS**

CURITIBA

2011

NEIL FRANCO DE CARVALHO

**ESQUEMAS PARA CALCULAR A CONDUTIVIDADE TÉRMICA NAS FACES DE
VOLUMES FINITOS**

Tese apresentada como requisito para obter o título de Doutor em Engenharia Mecânica do curso de doutorado em engenharia mecânica da Universidade Federal do Paraná, na área de concentração de Fenômenos de Transporte e Mecânica dos Sólidos.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Henrique Marchi

CURITIBA

2011

TERMO DE APROVAÇÃO

NEIL FRANCO DE CARVALHO

ESQUEMAS PARA CALCULAR A CONDUTIVIDADE TÉRMICA NAS FACES DE VOLUMES FINITOS

Tese aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Mecânica, área de concentração de Fenômenos de Transporte e Mecânica dos Sólidos, no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Setor de Tecnologia da Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dra. Viviana Cocco Mariani
Pontifícia Universidade Católica do
Paraná (PUCPR)

Prof. Dr. Admilson Teixeira Franco
Universidade Tecnológica Federal do
Paraná (UTFPR)

Prof. Dr. Christian Johann Losso Hermes
Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Prof. Dr. Francisco Marcondes
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Orientador: Prof. Dr. Carlos H. Marchi
Universidade Federal do Paraná (UFPR)
Presidente

Curitiba, 22 de junho de 2011.

À minha querida esposa, Sandra.

Aos meus queridos filhos, Isabela e Rafael.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador, professor Carlos Henrique Marchi, pelo acompanhamento e revisão do trabalho, além do aconselhamento e amizade.

Aos professores e funcionários do PG-Mec, pela amizade e dedicação.

Aos meus colegas da Universidade Positivo (UP), que ao longo dos anos me apoiaram para a realização deste trabalho.

À minha esposa, Sandra, e aos meus filhos, Rafael e Isabela, pela paciência e compreensão.

Agradeço aos membros da Banca examinadora, prof. Francisco Marcondes, prof. Admilson Teixeira Franco, prof. Christian Johann Losso Hermes e profa. Viviana Cocco Mariani, pelo tempo despendido na leitura deste manuscrito e pelas importantes sugestões apontadas.

A todos que contribuíram, direta ou indiretamente, para a realização deste trabalho.

*“Não percas tempo julgando as pessoas,
assim não terás tempo para amá-las.”*

Madre Teresa de Calcutá.

RESUMO

A solução de problemas difusivos utilizando o método dos volumes finitos necessita do valor da condutividade térmica nas faces dos volumes de controle (somente se ela for variável). Assim, os objetivos deste trabalho são: (i) avaliar o desempenho de alguns esquemas usuais e introduzir novos esquemas para calcular o valor da condutividade térmica (k) nas faces de volumes de controle, quando esta é função da temperatura (T) e do meio (sólido ou fluido); (ii) verificar a influência da mudança de meio se dar em um nó ou na face do volume de controle; e (iii) verificar se o esquema usado para calcular k afeta a ordem do erro de T . Resultados são obtidos para cinco problemas unidimensionais de condução e advecção-difusão de calor, com ou sem fonte de geração de calor. Nestes problemas, a condutividade térmica é considerada variável com o tipo de meio (um ou dois) e com a temperatura. A avaliação é feita em doze esquemas para calcular k , sendo sete da literatura e cinco propostos neste trabalho. A principal contribuição deste trabalho é a avaliação detalhada – dos erros de discretização e suas ordens – dos diferentes esquemas disponíveis na literatura para se calcular a condutividade térmica nas faces dos volumes de controle, incluindo a discussão em relação à mudança de material que pode ocorrer na face ou no nó do volume de controle. Também, a relevância do trabalho está na proposição e avaliação de cinco esquemas novos para calcular a condutividade térmica. Observou-se que quando a condutividade térmica é independente da temperatura, o esquema da Média Harmônica de k Baseada na Distribuição Linear da Temperatura Nodal é a melhor opção, mesmo quando comparado ao esquema da Média Harmônica. Para os problemas onde a condutividade térmica é dependente da temperatura, o esquema da Solução Analítica de k Baseado no Problema de Difusão para Dois Meios é a melhor escolha.

Palavras-chave: Volumes finitos. Condutividade térmica. CFD. Verificação do erro. Erro de discretização.

ABSTRACT

The solution of diffusion problems using the finite volume method requires the value of thermal conductivity at the control-volumes surfaces (only if it is variable). In this context this study aims to: *(i)* evaluate the performance of some usual schemes and introduce new ones to calculate the value of thermal conductivity (k) at the control-volumes surfaces, when it is a function of temperature (T) and of mean (solid or fluid); *(ii)*) verify the influence of change of mean (if more than one) when occur in a node or at the control-volume surface; and *(iii)* check whether the scheme used to compute k affects the order of the error of T . Results are obtained for five one-dimensional advection-diffusion and heat conduction problems, with or without a source of heat generation. In these problems, the thermal conductivity is considered variable with the type of mean (one or two) and with temperature. The evaluation is done in twelve schemes to compute k , seven of the literature and five proposed in this work. The main contribution of this work is the detailed evaluation - the discretization errors and their orders - of various schemes available in the literature to calculate the thermal conductivity at the control-volumes surfaces, including the discussion regarding the change of mean that can occur at the surface or node of the control-volume. Also, the contribution of this work is the proposition and evaluation of five new schemes to calculate the thermal conductivity. It was observed that when the thermal conductivity is independent of temperature, the Harmonic Mean of k Based on the Linear Distribution of the Nodal Temperature scheme is the best option, even when compared to the Harmonic Mean scheme. For those problems where thermal conductivity is temperature dependent, the Analytical Solution of k Based on the Diffusion Problem for Two Materials scheme is the best choice.

Keywords: Finite volume. Thermal conductivity. CFD. Error verification. Discretization error.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	Mecanismos de transferência de calor	21
Figura 1.2	Transferência de calor em uma placa plana	24
Figura 1.3	Dependência da condutividade térmica com a temperatura para alguns sólidos	26
Figura 1.4	Malha unidimensional uniforme	27
Figura 1.5	Três perfis de aproximação para a variável primária ϕ	27
Figura 2.1	Malhas unidimensionais para volumes finitos	34
Figura 2.2	Malha unidimensional uniforme com volumes fictícios	35
Figura 2.3	Pontos auxiliares “a” e “b” para a face leste do VC	40
Figura 2.4	Hipótese para a variação da temperatura na face do VC para o LTMH	41
Figura 2.5	Esquema para o fluxo de calor em volumes de controle adjacentes	42
Figura 2.6	Hipótese para a variação da temperatura na face do VC para o TkMH	44
Figura 2.7	Definição do intervalo subconvergente da ordem efetiva	56
Figura 2.8	Definição do intervalo superconvergente da ordem efetiva	57
Figura 3.1	Volumes de controle adjacentes com materiais diferentes	58
Figura 4.1	Condições de contorno para os cinco problemas	67
Figura 4.2	Variação da condutividade térmica em função da temperatura para o Problema A	68
Figura 4.3	Solução exata para o Problema A	69
Figura 4.4	Variação da condutividade térmica em função da temperatura para o Problema B	70
Figura 4.5	Solução exata para o Problema B	70
Figura 4.6	Variação da condutividade térmica em função da posição espacial para o Problema C	71

Figura 4.7	Solução exata para o Problema C	72
Figura 4.8	Variação da condutividade térmica em função da temperatura para o Problema D	73
Figura 4.9	Solução exata para o Problema D	74
Figura 4.10	Variação da condutividade térmica em função da temperatura para o Problema E	75
Figura 4.11	Solução exata para o Problema E	76
Figura 4.12	Volume fictício $P = 0$ adjacente ao contorno esquerdo	79
Figura 4.13	Volume fictício $P = N + 1$ adjacente ao contorno direito	80
Figura 5.1	Mapa de leitura das análises	83
Figura 5.2	Média da norma l_1 dos erros verdadeiros (E) para o Problema A	84
Figura 5.3	Ordem efetiva do erro de discretização para o Problema A	87
Figura 5.4	Campo de temperaturas para o Problema A	88
Figura 5.5	Média da norma l_1 dos erros verdadeiros (E) para o Problema B	89
Figura 5.6	Ordem efetiva do erro de discretização para o Problema B	90
Figura 5.7	Campo de temperaturas para o Problema B	92
Figura 5.8	Média da norma l_1 dos erros verdadeiros (E) para o Problema C	93
Figura 5.9	Ordem efetiva do erro de discretização para o Problema C	95
Figura 5.10	Campo de temperaturas para o Problema C	97
Figura 5.11	Média da norma l_1 dos erros verdadeiros (E) para o Problema D	98
Figura 5.12	Ordem efetiva do erro de discretização para o Problema D	99
Figura 5.13	Campo de temperaturas para o Problema D	101
Figura 5.14	Média da norma l_1 dos erros verdadeiros (E) para o Problema E	102
Figura 5.15	Ordem efetiva do erro de discretização para o Problema E	104
Figura 5.16	Campo de temperaturas para o Problema E	105
Figura 5.17	Resíduo entre duas iterações consecutivas para o Problema B	108

Figura 5.18	Tempo de CPU para o Problema A	110
Figura 5.19	Tempo de CPU para o Problema B	111
Figura 5.20	Tempo de CPU para o Problema C	113
Figura 5.21	Tempo de CPU para o Problema D	115
Figura 5.22	Tempo de CPU para o Problema E	116
Figura 5.23	Detalhes na geração da malha	118
Figura 5.24	Média da norma l_1 dos erros verdadeiros (E) para o Problema C com mudança do material no nó	118
Figura 5.25	Ordem efetiva do erro de discretização para o Problema C com mudança do material no nó	120
Figura 5.26	Média da norma l_1 dos erros verdadeiros (E) para o Problema D com mudança do material no nó	121
Figura 5.27	Ordem efetiva do erro de discretização para o Problema D com mudança do material no nó	122
Figura 5.28	Média da norma l_1 dos erros verdadeiros (E) para o Problema D - análise suplementar	123
Figura 5.29	Ordem efetiva do erro de discretização para o Problema D - análise suple- mentar	124
Figura 5.30	Diferença percentual (ϵ) da condutividade térmica para o Problema D com $N = 16$	126

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1	Problemas utilizados nas análises	67
Tabela 4.2	Número de volumes de controle e tamanhos de malhas	77
Tabela 4.3	Coeficientes dos volumes fictícios para imposição das condições de contorno	81
Tabela 5.1	Comparação entre os esquemas de cálculo da condutividade térmica para o Problema A	86
Tabela 5.2	Ordem efetiva do erro de discretização para o Problema A	86
Tabela 5.3	Ordenação por resultados do erro de discretização para o Problema A	87
Tabela 5.4	Comparação entre os esquemas de cálculo da condutividade térmica para o Problema B	90
Tabela 5.5	Ordem efetiva do erro de discretização para o Problema B	91
Tabela 5.6	Ordenação por resultados do erro de discretização para o Problema B	93
Tabela 5.7	Comparação entre os esquemas de cálculo da condutividade térmica para o Problema C	94
Tabela 5.8	Ordem efetiva do erro de discretização para o Problema C	96
Tabela 5.9	Ordenação por resultados do erro de discretização para o Problema C	96
Tabela 5.10	Comparação entre os esquemas de cálculo da condutividade térmica para o Problema D	99
Tabela 5.11	Ordem efetiva do erro de discretização para o Problema D	100
Tabela 5.12	Ordenação por resultados do erro de discretização para o Problema D	100
Tabela 5.13	Comparação entre os esquemas de cálculo da condutividade térmica para o Problema E	103
Tabela 5.14	Ordem efetiva do erro de discretização para o Problema E	104
Tabela 5.15	Ordenação por resultados do erro de discretização para o Problema E	105

Tabela 5.16	Comparação entre os tempos de CPU	107
Tabela 5.17	Número de iterações utilizadas na solução dos problemas	107
Tabela 5.18	Razão entre usos de memória <i>cache</i>	109
Tabela 5.19	Parâmetros a e b das curvas dos tempos de CPU em função de N para o Problema A	110
Tabela 5.20	Comparação entre os tempos de CPU para o Problema A	111
Tabela 5.21	Comparação entre os tempos de CPU para o Problema B	112
Tabela 5.22	Parâmetros a e b das curvas dos tempos de CPU em função de N para o Problema B	112
Tabela 5.23	Parâmetros a e b das curvas dos tempos de CPU em função de N para o Problema C	113
Tabela 5.24	Comparação entre os tempos de CPU para o Problema C	114
Tabela 5.25	Comparação entre os tempos de CPU para o Problema D	115
Tabela 5.26	Parâmetros a e b das curvas dos tempos de CPU em função de N para o Problema D	116
Tabela 5.27	Parâmetros a e b das curvas dos tempos de CPU em função de N para o Problema E	116
Tabela 5.28	Comparação entre os tempos de CPU para o Problema E	117
Tabela 5.29	Comparação entre os esquemas de cálculo da condutividade térmica para o Problema C com mudança do material no nó	119
Tabela 5.30	Ordenação por resultados do erro de discretização para o Problema C com mudança do material no nó	119
Tabela 5.31	Ordem efetiva do erro de discretização para o Problema C com mudança do material no nó	120
Tabela 5.32	Comparação entre os esquemas de cálculo da condutividade térmica para o Problema D com mudança do material no nó	121
Tabela 5.33	Ordem efetiva do erro de discretização para o Problema D com mudança do material no nó	122

Tabela 5.34	Ordenação por resultados do erro de discretização para o Problema D com mudança do material no nó	123
Tabela 5.35	Comparação entre os esquemas de cálculo da condutividade térmica para o Problema D considerando o esquema Híbrido	125
Tabela 5.36	Erro percentual da condutividade térmica para malha $N = 16$ do Problema D	125
Tabela A.1	Média da norma l_1 dos erros verdadeiros (E) para o Problema A	136
Tabela B.1	Média da norma l_1 dos erros verdadeiros (E) para o Problema B	137
Tabela C.1	Média da norma l_1 dos erros verdadeiros (E) para o Problema C	138
Tabela D.1	Média da norma l_1 dos erros verdadeiros (E) para o Problema D	139
Tabela E.1	Média da norma l_1 dos erros verdadeiros (E) para o Problema E	140
Tabela F.1	Erro percentual da condutividade térmica do Problema D calculada com o esquema MAk para malha $N = 16$	141
Tabela F.2	Erro percentual da condutividade térmica do Problema D calculada com o esquema MHk para malha $N = 16$	141
Tabela F.3	Erro percentual da condutividade térmica do Problema D calculada com o esquema Híbrido para malha $N = 16$	142

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AD1D	Solução analítica para o problema de advecção-difusão 1D
CDS	<i>Central Differencing Scheme</i>
CFD	<i>Computational Fluid Dynamics</i>
CPU	<i>Central Processing Unit</i>
DK1D	Solução analítica para o problema de difusão 1D
KG2P	Transformação local de Kirchhoff usando 2 pontos na quadratura gaussiana
KG3P	Transformação local de Kirchhoff usando 3 pontos na quadratura gaussiana
KG4P	Transformação local de Kirchhoff para dois meios usando 2 pontos na quadratura gaussiana em cada meio
KG6P	Transformação local de Kirchhoff para dois meios usando 3 pontos na quadratura gaussiana em cada meio
Lk2M	Solução analítica para dois meios com condutividades térmicas lineares
LTMH	Média harmônica de k baseada na distribuição linear da temperatura nodal
MAk	Média Aritmética de k
MAT	Média Aritmética das Temperaturas Nodais
MDF	Método de Diferenças Finitas
MEF	Método dos Elementos Finitos
MHk	Média Harmônica de k
MVF	Método dos Volumes Finitos
TDMA	<i>Tridiagonal Matrix Algorithm</i>
TkMH	Média harmônica de k baseada na distribuição linear por setores da temperatura nodal
VC	Volume de Controle

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos latinos

A	área
E	erro de discretização
e	face leste do volume de controle
E, W	nós vizinhos à direita e à esquerda, repectivamente, de P
E_π	erro de arredondamento
E_n	erro de iteração
E_p	erro de programação
E_T	erro de truncamento
F	constante do termo advectivo
g	denominação dos pontos de integração na quadratura gaussiana
H	comprimento característico
h	tamanho do elemento de malha
k	condutividade térmica
L	média da norma l_1 do erro de discretização
N	número de pontos ou volumes de controle
n	variável livre
P	nó genérico da malha
P, Q	variáveis auxiliares do método TDMA
P_e	número de Peclet
p_E	ordem efetiva
p_L	ordem assintótica
p_V	ordem verdadeira
Q	taxa de transferência de calor
q_x	fluxo de calor na direção x
r	razão de refino de malha
R	razão entre os erros de discretização dos esquemas

R_1	razão entre os tempos de CPU
R_2	razão entre o uso de memória computacional
Res	resíduo entre duas iterações consecutivas
S, S^*	termo fonte
T	temperatura
T_{cpu}	tempo de CPU
w	face oeste do volume de controle
x	coordenada espacial
\mathcal{C}^∞	classe de funções infinitamente diferenciáveis
\mathcal{C}^n	classe de funções de ordem n diferenciáveis

Subscritos

a, b	pontos intermediários localizados entre P e E
e	face localizada à direita do ponto P
E	nó localizado à direita do ponto P
P	nó genérico da malha
w	face localizada à esquerda do ponto P
W	nó localizado à esquerda do ponto P

Símbolos gregos

ΔT	variação da temperatura
Φ	solução exata da variável de interesse
ε	erro percentual da condutividade térmica
ϕ	solução numérica da variável de interesse
θ	temperatura resultante da Transformação de Kirchhoff

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
1.1	TRANSFERÊNCIA DE CALOR	21
1.2	MÉTODOS PARA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM ENGENHARIA	22
1.3	EQUAÇÃO DA CONDUÇÃO DE CALOR	24
1.4	CONDUTIVIDADE TÉRMICA	26
1.5	PROBLEMATIZAÇÃO	26
1.6	OBJETIVOS	29
1.7	ESTRUTURA DO TRABALHO	30
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	31
2.1	MÉTODOS NUMÉRICOS	31
2.2	O MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS	32
2.2.1	Discretização do domínio de cálculo - geração da malha	32
2.2.2	Modelo matemático unidimensional em regime permanente para o problema de advecção-difusão	35
2.3	ESQUEMAS PARA CÁLCULO DA CONDUTIVIDADE TÉRMICA	37
2.3.1	Média aritmética de k - MAk	38
2.3.2	Média harmônica de k - MHk	38
2.3.3	Média aritmética das temperaturas nodais - MAT	39
2.3.4	Média harmônica de k baseada na distribuição linear da temperatura nodal - LTMH	40
2.3.5	Média harmônica de k baseada na distribuição linear por setores da temperatura nodal - TkMH	42
2.3.6	Transformação local de Kirchhoff usando quadratura gaussiana	44

2.3.7	Comentários gerais	47
2.4	MÉTODOS DE SOLUÇÃO PARA O SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES .	48
2.5	GENERALIDADES SOBRE A VERIFICAÇÃO DAS SOLUÇÕES NUMÉRICAS	48
2.5.1	Verificação das soluções numéricas	50
2.5.2	Intervalo de convergência da ordem efetiva	55
3	NOVOS ESQUEMAS PARA CALCULAR A CONDUTIVIDADE TÉRMICA....	58
3.1	SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA DOIS MEIOS COM CONDUTIVIDADES TÉR- MICAS LINEARES - LK2M	58
3.2	TRANSFORMAÇÃO LOCAL DE KIRCHHOFF PARA DOIS MEIOS USAN- DO 2 PONTOS NA QUADRATURA GAUSSIANA EM CADA MEIO - KG4P .	60
3.3	TRANSFORMAÇÃO LOCAL DE KIRCHHOFF PARA DOIS MEIOS USAN- DO 3 PONTOS NA QUADRATURA GAUSSIANA EM CADA MEIO - KG6P .	60
3.4	SOLUÇÃO ANALÍTICA DE k BASEADO NO PROBLEMA DE ADVECÇÃO- DIFUSÃO - AD1D	61
3.5	SOLUÇÃO ANALÍTICA DE k BASEADO NO PROBLEMA DE DIFUSÃO PARA DOIS MEIOS - DK1D	62
4	DEFINIÇÃO DOS PROBLEMAS DE TESTE E DETALHES DA MODELAGEM COMPUTACIONAL	66
4.1	DEFINIÇÃO DOS PROBLEMAS UTILIZADOS NA ANÁLISE	66
4.1.1	Solução analítica do Problema A	68
4.1.2	Solução analítica do Problema B	69
4.1.3	Solução analítica do Problema C	71
4.1.4	Solução analítica do Problema D	72
4.1.5	Solução analítica do Problema E	74
4.2	DEFINIÇÃO DA VARIÁVEL DE INTERESSE	76
4.3	DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO DE CÁLCULO	77
4.4	DISCRETIZAÇÃO GENERALIZADA DO MODELO MATEMÁTICO	78

4.4.1	Coeficientes dos volumes internos	78
4.4.2	Aplicação das condições de contorno	78
4.5	ALGORITMO DA SOLUÇÃO	81
4.6	RESUMO DO CAPÍTULO 4	82
5	RESULTADOS.....	83
5.1	MUDANÇA DE MEIO EM UMA FACE	84
5.1.1	Resultados para o Problema A	84
5.1.2	Resultados para o Problema B	88
5.1.3	Resultados para o Problema C	93
5.1.4	Resultados para o Problema D	97
5.1.5	Resultados para o Problema E	102
5.2	CUSTO COMPUTACIONAL	106
5.2.1	Problemas A e B	109
5.2.2	Problemas C e D com mudança de material em uma face	113
5.2.3	Problema E	116
5.3	MUDANÇA DE MEIO EM UM NÓ	117
5.3.1	Resultados para o Problema C	118
5.3.2	Resultados para o Problema D	120
5.4	ESQUEMA HÍBRIDO	123
5.5	RESUMO DOS RESULTADOS OBTIDOS	127
6	CONCLUSÃO	130
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	133
	APÊNDICE A – RESULTADOS PARA O PROBLEMA A	136
	APÊNDICE B – RESULTADOS PARA O PROBLEMA B	137

APÊNDICE C – RESULTADOS PARA O PROBLEMA C	138
APÊNDICE D – RESULTADOS PARA O PROBLEMA D	139
APÊNDICE E – RESULTADOS PARA O PROBLEMA E	140
APÊNDICE F – RESULTADOS PARA O ESQUEMA HÍBRIDO	141
APÊNDICE G – FORMA NUMÉRICA PARA O CÁLCULO DE k	143

1 INTRODUÇÃO

1.1 TRANSFERÊNCIA DE CALOR

Transferência de Calor é energia em trânsito devido a uma diferença de temperatura¹ (INCROPERA; WITT, 1996). Sempre que existir uma diferença de temperatura em um meio ou entre meios ocorrerá transferência de calor.

Muitos são os problemas de engenharia, dentre eles, os químicos, físicos e biológicos que são influenciados pela variação da temperatura. É, também, comum a ocorrência de problemas acoplados como, por exemplo, os que envolvem temperatura e tensão. Nesses casos, a solução depende do conhecimento prévio do campo de temperatura para que se obtenha o valor da tensão.

Os diferentes processos de transferência de calor são referidos como mecanismos de transferência de calor. Inicia-se este trabalho pela descrição dos três mecanismos conhecidos: radiação, convecção e condução.

A radiação é energia sob a forma de ondas eletromagnéticas visíveis e invisíveis que se propagam através do espaço, envolvendo campos elétricos e magnéticos que vibram em direções perpendiculares entre si e à direção de propagação, não necessitando de meio de suporte. A Fig. 1.1(a) apresenta um exemplo de transferência de calor por radiação.

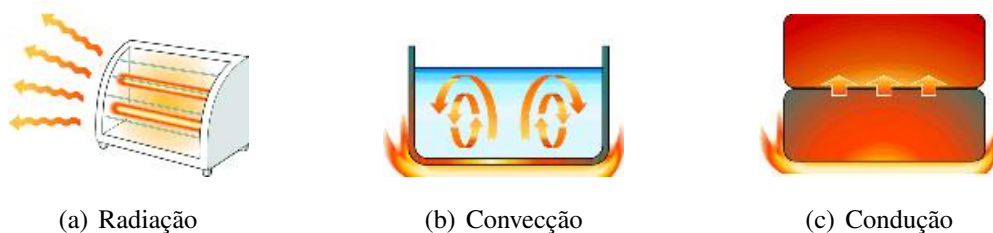


Figura 1.1: Mecanismos de transferência de calor

A convecção é um mecanismo de transferência de calor típico dos meios fluidos (líquidos e gases), já que só nestes há possibilidade de deslocamento do meio em que se propaga o calor. Assim, a convecção é um processo pelo qual o calor é transferido de um local para outro de

¹Temperatura é a grandeza física associada ao grau médio de agitação das partículas que compõem um corpo ou substância.

um fluido pelo movimento macroscópico de partículas desse fluido. A Fig. 1.1(b) apresenta um exemplo de transferência de calor por convecção. Conforme Incropera e Witt (1996), o modo de transferência de calor por convecção abrange dois mecanismos: (i) transferência de energia devido ao movimento molecular aleatório (*difusão*) e (ii) energia transferida através do movimento global ou macroscópico do fluido. Uma vez que as moléculas nos agregados moleculares mantêm seus movimentos aleatórios, a transferência total de calor é então composta pela superposição do transporte de energia devido ao movimento aleatório das moléculas, com o transporte devido ao movimento global do fluido. É comum usar o termo *convecção* para se referir a este transporte cumulativo, e o termo *advecção* para se referir ao transporte devido exclusivamente ao movimento global do fluido.

Condução de calor é o processo de troca de energia entre sistemas, ou partes de um mesmo sistema em diferentes temperaturas, que ocorre pela interação molecular na qual moléculas de alto nível energético transferem energia, pelo impacto, às outras, de menor nível energético, gerando uma onda térmica, cuja velocidade de propagação depende claramente da natureza da matéria (FILHO, 2004). Ou seja, esse movimento aleatório das moléculas que provoca a transferência de calor de uma região para outra é chamado de difusão (condução) de calor. A Fig. 1.1(c) apresenta um exemplo de transferência de calor por condução. Os metais, por exemplo, são bons condutores e outras substâncias como a cortiça, o ar, a madeira, o algodão, etc., são isolantes térmicos. Nos líquidos e nos gases, o espaçamento intermolecular é muito maior quando comparado aos metais e o movimento das moléculas é mais aleatório do que no estado sólido, assim, o transporte de energia térmica em fluidos é menos efetivo do que em sólidos e, conseqüentemente, a condução térmica é baixa (INCROPERA; WITT, 1996). Por esse motivo é que os gases são utilizados como isolantes térmicos.

Neste trabalho, a atenção é voltada para a modelagem de problemas que envolvem a transferência de calor por mecanismos de difusão e advecção. A preocupação principal é com os aspectos computacionais, mesmo assim, não se deixa de levar em consideração o fenômeno físico do problema que está sendo modelado. Na próxima seção são descritos alguns métodos para a solução de problemas de engenharia.

1.2 MÉTODOS PARA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM ENGENHARIA

A obtenção da solução de um determinado problema de engenharia pode ser feita, basicamente, por três caminhos diferentes: (i) os métodos analíticos, (ii) os métodos numéricos (experimentação numérica) e (iii) os métodos experimentais (experimentação em laboratório)

(MALISKA, 2004).

O método analítico possibilita o modelamento matemático através de equações diferenciais e integrais que representam o fenômeno associado à elas. Porém, este método é geralmente aplicado a problemas que acabam se desviando muito do fenômeno físico real, isto é, suas hipóteses iniciais são simplificadas para facilitar a solução destas equações. Uma vantagem significativa é a obtenção da solução de forma fechada, requerendo pouco esforço computacional (CHUNG, 2002). Uma das importantes aplicações das soluções analíticas está na verificação de soluções numéricas.

O uso das técnicas numéricas para a solução de problemas da engenharia e da física é hoje uma realidade, graças ao desenvolvimento de computadores de alta velocidade e de grande capacidade de armazenamento (MALISKA, 2004). O objetivo do método numérico é resolver uma ou mais equações diferenciais, substituindo-se as derivadas existentes por expressões algébricas que envolvem a função incógnita. Quando a solução analítica não é possível, e se faz a opção pela numérica, a solução obtida será para um número discreto de pontos, com um determinado erro, esperando-se que, quanto maior o número de pontos, mas próximo da solução exata estará a numérica.

Os métodos numéricos apresentam vantagens inquestionáveis, como, a possibilidade de executar várias versões de possíveis soluções a fim de se otimizar a resposta, obter rapidez na resposta, menor custo em relação aos métodos experimentais e razoável facilidade de execução. Entre esses métodos, coloca-se o Método das Diferenças Finitas (MDF), o Método dos Elementos Finitos (MEF), o Método dos Volumes Finitos (MVF), o Método dos Elementos de Contorno, entre outros. Apesar de ser uma solução aproximada, suas características de relativo baixo custo, alta flexibilidade e disponibilidade para a resolução de praticamente qualquer tipo de problema são vantagens decisivas.

Qualquer que seja a metodologia numérica utilizada, deve-se fazer a verificação dos resultados. A **verificação** é o processo que quantifica o erro numérico pela comparação entre os resultados da solução numérica com a solução analítica existente (AIAA, 1998; FORTUNA, 2000; ROACHE, 1998).

Conforme Maliska (2004), as soluções via técnicas numéricas, praticamente, não apresentam restrições, podendo resolver problemas com condições de contorno e geometrias complexas.

A experimentação em laboratório apresenta algumas vantagens interessantes, como a simplificação de cálculos e a alta confiança na resposta obtida que depende, evidentemente, da pre-

cisão e acurácia dos equipamentos utilizados. Porém, também apresenta fortes desvantagens, como o alto custo da confecção de protótipos, a validade da resposta para casos específicos e o tempo consumido, o que a coloca como uma difícil opção quando se busca avaliar, por exemplo, diferentes configurações de um novo produto, pois qualquer alteração da forma do modelo exige a confecção de um novo protótipo, com os custos relativos.

1.3 EQUAÇÃO DA CONDUÇÃO DE CALOR

Os problemas de engenharia que envolvem a condução de calor, e mesmo outros, podem ser resolvidos a partir de uma base teórica ou experimental. Para essas formas de solução são necessárias idealizações e aproximações que são características de cada uma delas.

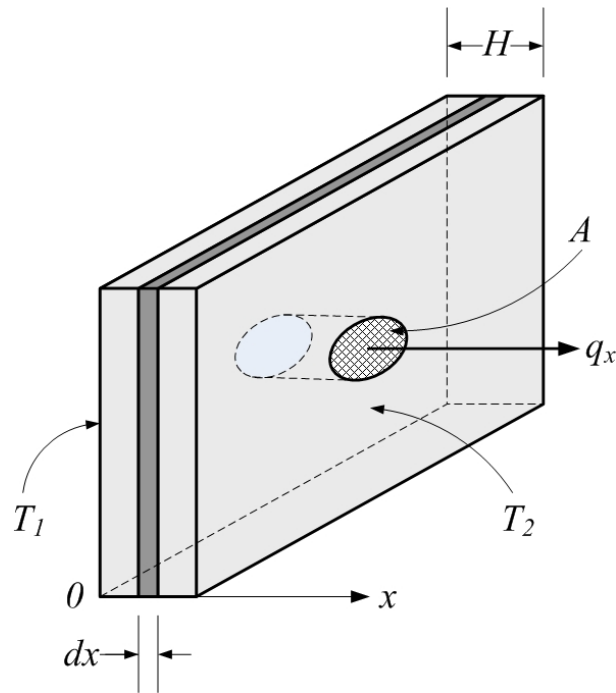


Figura 1.2: Transferência de calor em uma placa plana

Assim, com base na formulação teórica para a solução do problema de condução de calor, considere uma placa plana, conforme a Fig. 1.2, de espessura H . Suponha um cilindro imaginário no centro da placa com uma seção transversal A na qual o eixo é normal à superfície da placa. Estas idealizações permitem considerar o problema como unidimensional ao longo do eixo do cilindro, isto é, sem levar em consideração os efeitos de bordo ao longo da espessura da placa. Sejam as temperaturas T_1 e T_2 as condições de contorno (temperaturas da superfície da placa) indicadas na Fig. 1.2 e, por exemplo, $T_1 > T_2$.

Em regime permanente existe uma taxa constante de transferência de calor Q que é ne-

cessária para manter a diferença de temperatura $\Delta T = T_1 - T_2$. Assim, para pequenos valores de diferença de temperatura entre as superfícies da placa,

$$\frac{Q}{A} = k \frac{\Delta T}{H} \quad (1.1)$$

onde k é constante e representa a condutividade térmica do material da placa.

A Eq. (1.1) pode ser escrita na forma diferencial. Assim, o fluxo de calor é dado por

$$q_x = -k \frac{dT}{dx} \quad (1.2)$$

onde q_x é o fluxo de calor na direção x . A Eq. (1.2) é a forma unidimensional da lei de Fourier da condução de calor (BIRD *et al.*, 2004; INCROPERA; WITT, 1996).

Alguns sólidos como os cristais, madeiras e materiais laminados são anisotrópicos. Para esses materiais, a lei de Fourier é dada por

$$\mathbf{q} = -\mathbf{k} \cdot \nabla T \quad (1.3)$$

onde \mathbf{k} é o tensor condutividade térmica e as componentes deste tensor são chamadas de coeficientes da condutividade térmica.

Considerando o balanço de energia, pode-se escrever a lei da conservação da energia para o regime permanente:

$$\text{taxa de entrada de energia} + \text{taxa de produção de energia} = \text{taxa de saída de energia}.$$

Por simplicidade, desconsiderando a geração de calor, chega-se a equação da condução, fazendo

$$\frac{dq_x}{dx} = 0 \quad (1.4)$$

Quando se introduz a lei de Fourier, Eq. (1.2), na Eq. (1.4), a forma diferencial da equação da condução de calor é obtida, sendo,

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) = 0 \quad (1.5)$$

1.4 CONDUTIVIDADE TÉRMICA

Diretamente relacionado à determinação do campo de temperatura está o estudo das propriedades térmicas, dentre elas, a condutividade térmica k . Essa propriedade fornece uma indicação da taxa segundo a qual a energia é transferida pelo mecanismo de condução (INCROPERA; WITT, 1996).

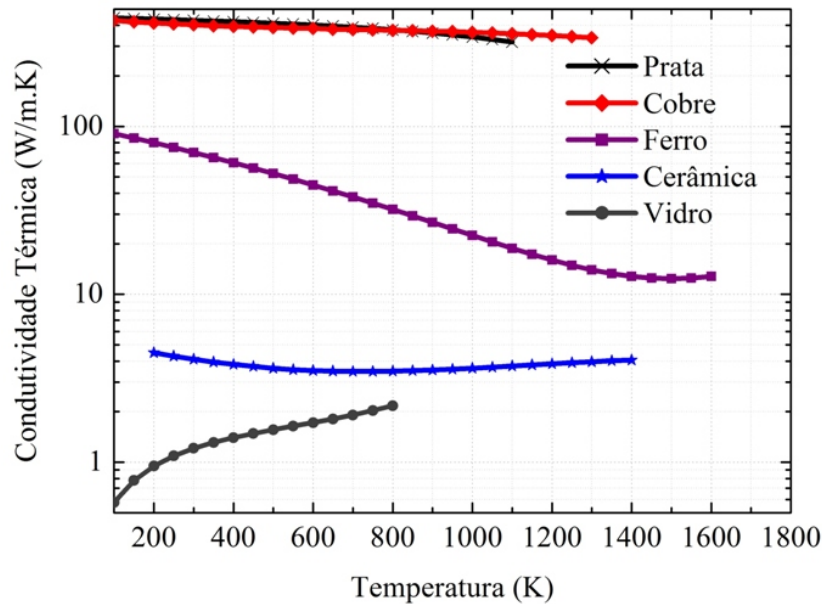


Figura 1.3: Dependência da condutividade térmica com a temperatura para alguns sólidos

A Fig. 1.3 mostra a dependência do valor de k com a temperatura para alguns sólidos. Análises mais detalhadas sobre a dependência da condutividade térmica em função da temperatura podem ser obtidas em Bird *et al.* (2004) e Rohsenow *et al.* (1998).

1.5 PROBLEMATIZAÇÃO

A base teórica para a solução de um problema que envolve condução de calor se constitui de métodos analíticos e numéricos, sendo que cada um deles tem vantagens e desvantagens. Este texto utiliza a solução analítica para a verificação das soluções obtidas com o Método dos Volumes Finitos - MVF (MALISKA, 2004; PATANKAR, 1980) para a discretização da equação de condução de calor.

O objetivo de um método numérico discreto é substituir a equação diferencial de condução por um conjunto de equações algébricas que, quando resolvidas, fornece o valor da variável de interesse para um conjunto de posições discretas dentro do domínio de cálculo.

O MVF consiste em: dividir o domínio computacional em um número de volumes de con-

trole que não se sobreponham; associar um ponto nodal a cada volume de controle; integrar as equações de conservação em cada volume de controle, gerando uma equação de balanço da grandeza de interesse.

Para detalhar a motivação deste trabalho, considere a etapa onde se realiza a integração da equação de conservação em um volume de controle genérico P , o qual tem os nós E e W como seus vizinhos (E fica no lado leste enquanto W fica do lado oeste).

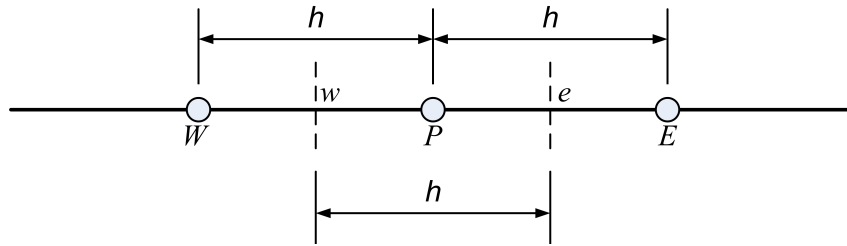


Figura 1.4: Malha unidimensional uniforme

Na Fig. 1.4, as linhas tracejadas são as faces que limitam o volume de controle e as letras “e” e “w” denotam estas faces, e h representa o tamanho do volume para a malha unidimensional. Para o problema unidimensional em consideração, a integração da Eq. (1.5) sobre o volume de controle P resulta em

$$\left(k \frac{dT}{dx}\right)_e - \left(k \frac{dT}{dx}\right)_w = 0 \quad (1.6)$$

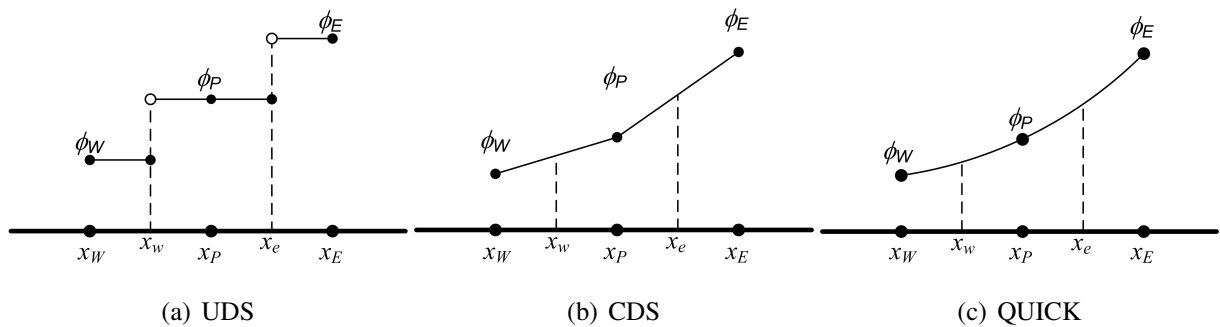


Figura 1.5: Três perfis de aproximação para a variável primária ϕ

Para se obter a solução da Eq. (1.6) é necessário definir um perfil de variação para T ou uma função de interpolação para se calcular as derivadas. Algumas possibilidades para os perfis de aproximação de uma variável primária genérica ϕ são mostrados na Fig. 1.5. A Fig. 1.5(a) apresenta um esboço do esquema UDS - *Upstream Difference Scheme* - proposto por Courant *et al.* (1952), sendo que, para esta figura, o fluxo é na direção positiva (oeste para

leste). A Fig. 1.5(b) apresenta o esquema CDS - *Central Difference Scheme* (MALISKA, 2004; PATANKAR, 1980) e o esquema QUICK - *Quadratic Upwind Interpolation for Convective Kinematics Scheme*, Fig. 1.5(c), que foi proposto por Leonard (1979).

No caso da Eq. (1.6), o esquema UDS não tem dT/dx definido nas faces do volume de controle. Já, o esquema QUICK faz a aproximação da variável por uma parábola. A construção da parábola para a interpolação necessita de três pontos (considerando a face “e”): nó P , nó E e um terceiro ponto que é escolhido de acordo com o problema.

Neste trabalho, não se está especialmente interessado na distribuição de temperaturas entre os nós e sim, nos esquemas de cálculo da condutividade térmica na face do volume de controle. Neste sentido, é razoável supor que, entre os nós, a temperatura varia de forma linear. Assim, por simplicidade de implementação computacional, o método de interpolação ou esquema de discretização utilizado será o CDS.

Avaliando a derivada dT/dx com o CDS, chega-se a

$$k_e \frac{(T_E - T_P)}{h} - k_w \frac{(T_P - T_W)}{h} = 0 \quad (1.7)$$

onde k_e e k_w representam a condutividade térmica da face leste e oeste, respectivamente. As variáveis T_E , T_P e T_W são as temperaturas nodais nos nós E , P e W , respectivamente.

Observando a Eq. (1.7) se conclui que é necessário conhecer os valores da condutividade térmica nas faces dos volumes de controle para se obter a equação discreta associada a este volume. Estes valores, muitas vezes, são dependentes da própria temperatura. Assim, lança-se mão de esquemas para aproximação de k nessas faces.

Atualmente, os dois esquemas mais utilizados para cálculo da condutividade térmica na face do volume de controle são os esquemas da média aritmética (MAk) e da média harmônica (MHk) dos valores nodais da condutividade térmica (PATANKAR, 1980; LIU; MA, 2005).

Além dos esquemas MAk e do MHk, existem outros que são utilizados em diferentes situações onde as propriedades são variáveis, por exemplo, no caso dos materiais compósitos, nas interfaces sólido-fluido e em problemas que envolvem mudança de fase. Assim, a decisão de se adotar um esquema de aproximação para o cálculo da condutividade térmica nas faces dos volumes de controle não é uma tarefa muito simples se for considerado que tal esquema deve ser de baixo custo computacional e, ainda, não deve deteriorar a ordem de aproximação dos esquemas de discretização utilizados para aproximar a variável primária.

Pela revisão da literatura que foi realizada neste trabalho, ainda faltam pesquisas que ana-

lisem em detalhes as mudanças abruptas da condutividade térmica em problemas não-lineares de condução de calor, especialmente com análise de erros. Muitos dos trabalhos, como por exemplo em Liu e Ma (2005), utilizam duas ou três malhas para a avaliação de desempenho dos esquemas nos problemas de teste, sendo que estas análises podem levar à conclusões equivocadas na avaliação global.

Muitos são os problemas de engenharia resolvidos numericamente que estão associados à condução de calor como, por exemplo, os que envolvem materiais heterogêneos, materiais porosos, materiais compósitos e etc. Neste sentido, existe a necessidade de se melhorar a precisão e a confiabilidade desses resultados numéricos. Assim, para o cálculo da condutividade térmica na face do volume de controle (no âmbito do MVF), o desenvolvimento de novos esquemas, as comparações com esquemas consagrados na literatura e a verificação com a solução analítica que são realizadas neste trabalho pode dar ao analista uma segurança na escolha do esquema a ser utilizado.

Neste trabalho são analisados cinco problemas unidimensionais difusivos e advectivos. Para todos estes problemas, a solução analítica é conhecida. Pretende-se, desta forma, demonstrar a importância de se verificar o erro de uma solução numérica e observar como se comporta o erro numérico conforme a malha é refinada.

1.6 OBJETIVOS

O presente trabalho tem como objetivo geral desenvolver esquemas numéricos e testar os já existentes para o cálculo da condutividade térmica, utilizando o método dos volumes finitos, em problemas de advecção-difusão.

Os objetivos específicos são:

- I. Propor novos esquemas para calcular a condutividade térmica nas faces dos volumes de controle;
- II. Verificar erros de discretização e as suas ordens efetivas dos novos esquemas propostos e de alguns existentes na literatura;
- III. Comparar o custo computacional de todos os esquemas;
- IV. Verificar a influência da posição espacial (face ou nó) na mudança da condutividade térmica em relação ao esquema de cálculo proposto.

1.7 ESTRUTURA DO TRABALHO

Neste capítulo foi feita a contextualização do problema, a apresentação da escolha do tema e definidos os objetivos gerais e específicos para o trabalho.

A revisão bibliográfica com os diversos esquemas usualmente utilizados na literatura para calcular a condutividade térmica na face do volume de controle é feita no Capítulo 2. Neste capítulo se discutem vários aspectos relacionados aos métodos numéricos e, em particular o MVF. Além disso, são definidos os modelos matemático e numérico para os problemas unidimensionais abordados neste trabalho. O capítulo se encerra com importantes conceitos sobre a verificação de soluções numéricas.

No Capítulo 3 são apresentados cinco novos esquemas para cálculo da condutividade térmica na face do VC.

A definição de cinco problemas unidimensionais para a aplicação e avaliação dos esquemas de cálculo da condutividade térmica é feita no Capítulo 4. Este capítulo traz, ainda, a discretização do domínio de cálculo e do modelo matemático. Um algoritmo da solução em linguagem natural também é apresentado.

No Capítulo 5 são expostos os resultados dos erros numéricos para os problemas de condução de calor e advecção-difusão unidimensional. A avaliação da influência que os esquemas de cálculo da condutividade térmica produzem na solução é feita levando em consideração a ordem efetiva da discretização e o custo computacional.

As conclusões gerais deste trabalho são apresentadas no Capítulo 6, bem como as sugestões para trabalhos futuros.

Os Apêndices A, B, C, D e E apresentam os resultados para os esquemas de cálculo da condutividade térmica dos problemas utilizados como teste.

Os resultados de um esquema Híbrido que combina os esquemas MA_k e MH_k para o cálculo da condutividade térmica são apresentados no Apêndice F.

O Apêndice G apresenta a forma numérica utilizada na implementação do programa computacional para o cálculo da condutividade térmica.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 MÉTODOS NUMÉRICOS

Diversas técnicas numéricas foram desenvolvidas para diferentes categorias de problemas de engenharia. Cada uma dessas técnicas possuem vantagens e desvantagens que são próprias das abordagens utilizadas. Dentre as categorias de problemas que são resolvidos com técnicas numéricas, pode-se citar os problemas de mecânica dos fluidos, mecânica dos sólidos e eletricidade, por exemplo.

A utilização de métodos numéricos na mecânica computacional tem aumentado, principalmente na dinâmica dos fluidos computacional (CFD). A CFD pode ser descrita de forma generalizada como a simulação numérica de todos os sistemas que envolvem o escoamento de fluidos, transferência de calor e outros processos físicos relacionados (VERSTEEG; MALALASEKERA, 1995). Esta área da engenharia se utiliza dos métodos numéricos para calcular as grandezas de interesse nos escoamentos, em pontos do domínio físico, geralmente, denominados de pontos nodais ou, simplesmente, nós.

Os principais métodos utilizados para simulação numérica em CFD são: Métodos de Diferenças Finitas (MDF); Método de Volumes Finitos (MVF) e Métodos de Elementos Finitos (MEF).

A aplicação de um programa computacional que utiliza um método numérico para a solução de problemas de engenharia pode ser dividida em três etapas principais:

- a) pré-processamento;
- b) processamento; e
- c) pós-processamento.

Na etapa de pré-processamento, define-se a geometria ou domínio físico do problema, domínio este, que discretizado, constitui a malha para a qual será substituída a informação contínua contida na solução exata da equação diferencial por valores discretos nos nós da malha. Nesta etapa, também, devem ser definidas as propriedades físicas do fluido e demais parâmetros (condições de contorno e iniciais) necessários para a solução do problema.

Na fase de processamento, aplica-se um “*solver*” (aqui, “*solver*” é o conjunto de sub-rotinas responsáveis pela solução do sistema de equações) baseado no modelo numérico para se obter a solução para as variáveis de interesse (velocidade, pressão, temperatura e etc) no domínio de cálculo.

Na etapa de pós-processamento é feita a análise e visualização dos resultados. É nesta etapa que se faz a verificação do modelo numérico que foi utilizado, para depois, utilizá-lo nos problemas de engenharia.

2.2 O MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS

O MVF é um método numérico utilizado para a avaliação teórica de vários processos de engenharia baseado na resolução de balanços de massa, energia e quantidade de movimento, através da modelagem matemática e da solução de um conjunto discreto de equações.

Várias são as vantagens em se utilizar uma estratégia numérica para solução de um problema de engenharia como é o caso do MVF. Pode-se citar como principal vantagem o baixo custo quando se compara aos métodos experimentais (MALISKA, 2004). Apesar dessas e outras vantagens que podem ser atribuídas às soluções numéricas, algumas desvantagens podem ser relacionadas aos métodos computacionais, como por exemplo, a dificuldade em resolver problemas com geometrias complexas e não linearidades. Outra desvantagem é que não se pode obter solução numérica para problemas que não possuem uma modelagem matemática adequada.

A tarefa do método numérico, como dito anteriormente, é transformar uma equação diferencial parcial em um sistema de n equações algébricas lineares com n incógnitas, uma para cada nó.

O MVF tem como característica para a obtenção das equações aproximadas satisfazer a conservação da propriedade em nível de volumes elementares (MALISKA, 2004). Para tanto, existem duas maneiras de se obter as equações aproximadas do MVF: (i) realizar balanços da propriedade em questão nos volumes elementares ou; (ii) integrar sobre o volume elementar, no espaço e no tempo, as equações na forma conservativa.

2.2.1 Discretização do domínio de cálculo - geração da malha

As variáveis são calculadas em pontos nodais definidos pelas malhas numéricas as quais são, essencialmente, uma representação discretizada do domínio geométrico no qual o problema

irá ser resolvido. A malha divide o domínio da solução em um número finito de sub-domínios (elementos, volumes de controle, etc.) (FERZIGER; PERIC, 2002).

A Fig. 2.1 representa as configurações das malhas unidimensionais empregadas para a obtenção das soluções numéricas pelo MVF. O comprimento H é o tamanho total do domínio de cálculo e o número de volumes (N) é particular de cada solução.

As discretizações para volumes finitos podem ser classificadas quanto ao tipo de discretização presente na fronteira ou contorno do domínio e quanto à posição relativa das faces e volumes.

Em relação à fronteira têm-se:

- malha com volume inteiro no contorno, ver Fig. 2.1(a);
- malha com meio-volume no contorno, ver Fig. 2.1(b).

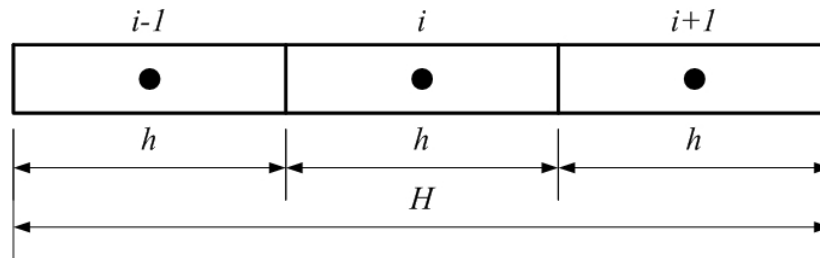
Em relação à posição relativa de centros e faces de volumes tem-se:

- volumes de nós centrados, ver Fig. 2.1(c);
- volumes de faces centradas, ver Fig. 2.1(d); e,
- volumes de nós e faces centradas, ver Fig. 2.1(a).

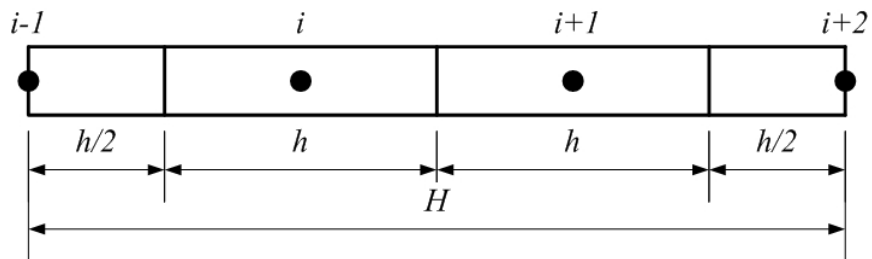
A geração de malhas com meio-volume na fronteira, conforme a Fig. 2.1(b), facilita a aplicação das condições de contorno, uma vez que os nós dos volumes estão sobre a fronteira, permitindo aplicação direta de condições de contorno do tipo Dirichlet (PATANKAR, 1980; MALISKA, 2004). Nessa situação, tal facilidade em não se necessitar criar uma equação para o volume de fronteira, traduz-se na não-observância dos balanços de conservação, pois, para os meios-volumes da fronteira, a conservação da energia não estará sendo observada. Quando se tem volumes inteiros sobre a fronteira, como é o caso da Fig. 2.1(a), o problema da não conservação de propriedades nestes volumes é eliminado.

Conforme Patankar (1980), os volumes de controle (volumes internos) podem ser construídos em relação a sua geometria de duas formas: com os nós centrados entre as faces do volume ou com as faces centradas entre os nós. Em uma malha com os nós centrados entre as faces do volume, como a representada na Fig. 2.1(c) para o caso unidimensional, os nós dos volumes estão localizados no centro geométrico do volume. Para uma malha com as faces centradas entre os nós, as faces dos volumes estão localizadas no ponto médio do segmento que

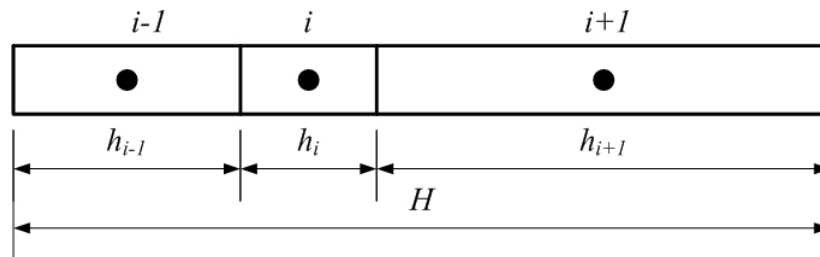
liga dois nós consecutivos, conforme a Fig. 2.1(d). Em Schneider (2007) é apresentado um estudo detalhado em relação a verificação dos erros em malhas não-uniformes.



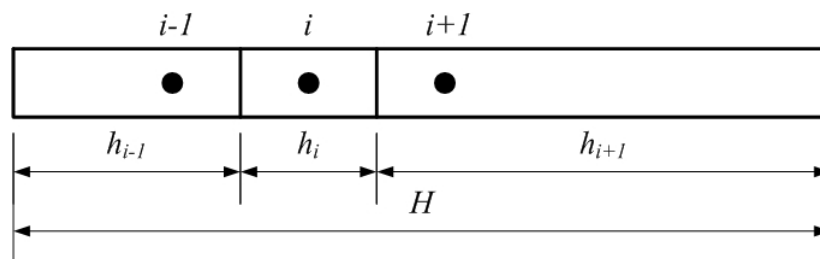
(a) uniforme com volume inteiro na fronteira



(b) uniforme com meio-volume na fronteira



(c) não-uniforme de nó centrado



(d) não-uniforme de face centrada

Figura 2.1: Malhas unidimensionais para volumes finitos

Neste trabalho, optou-se pela geração das malhas com base em volumes uniformes de nós e faces centradas para a avaliação dos esquemas de cálculo da condutividade térmica nas faces dos volumes de controle.

2.2.2 Modelo matemático unidimensional em regime permanente para o problema de advecção-difusão

Com o propósito de introduzir e demonstrar os vários esquemas para calcular a condutividade térmica na face do VC, será considerado o problema em regime permanente, dado pela seguinte equação governante:

$$F \frac{dT}{dx} = \frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) + S \quad (2.1)$$

onde T é a temperatura, x é a coordenada espacial do domínio de cálculo, k é a função condutividade térmica e S é um termo fonte. Um valor constante e diferente de zero para F permite avaliar os esquemas para calcular a condutividade térmica na presença do termo advectivo.

2.2.2.1 Discretização do modelo matemático

Com base no modelo matemático do problema, dado pela Eq. (2.1), pode-se realizar a discretização do modelo matemático pelo MVF. Os volumes são numerados de 1 até N (volumes reais) para o domínio de cálculo. Dois outros volumes, chamados volumes fictícios, colocados nos contornos esquerdo e direito, são utilizados para a imposição das condições de contorno, conforme Fig. 2.2. As condições de contorno quando aplicadas utilizando a técnica de volumes fictícios apresentam facilidade de implementação em malhas ortogonais (MALISKA, 2004). Nos resultados apresentados no Capítulo 5 são considerados apenas os volumes reais.

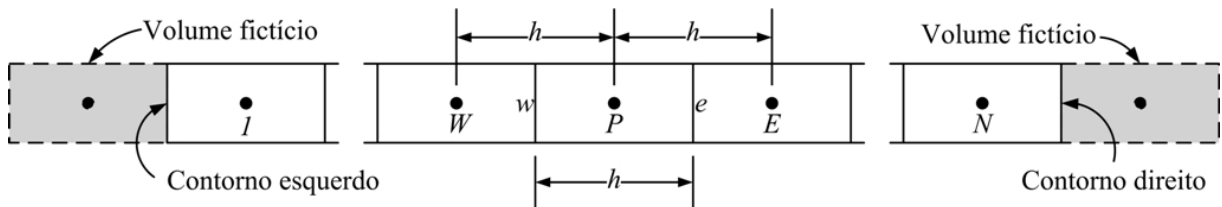


Figura 2.2: Malha unidimensional uniforme com volumes fictícios

A Fig. 2.2 mostra as faces oeste (“w”) e leste (“e”) associadas a um nó genérico “P”. Nesta figura a malha é uniforme e o tamanho do VC é dado por “h”.

Para o volume genérico P da Fig. 2.2, pode-se fazer a integração da Eq. (2.1) sobre esse VC, assim

$$\int_{x_w}^{x_e} \left[F \frac{dT}{dx} \right] dx = \int_{x_w}^{x_e} \left[\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) + S \right] dx \quad (2.2)$$

O resultado da integração da Eq. (2.2) sem nenhuma aproximação é dado por:

$$F(T_e - T_w) = \left(k \frac{dT}{dx} \right)_e - \left(k \frac{dT}{dx} \right)_w + \int_{x_w}^{x_e} S dx \quad (2.3)$$

onde T_e e T_w representam as temperaturas nas faces leste e oeste, respectivamente. O termo fonte pode ser integrado analiticamente ou pode ser utilizado um método de integração numérica adequado.

Assim, utilizando a função de interpolação CDS, pode-se aproximar os termos da Eq.(2.3) por:

$$T_e = \frac{T_E + T_P}{2} \quad (2.4)$$

$$T_w = \frac{T_P + T_W}{2} \quad (2.5)$$

$$\left(k \frac{dT}{dx} \right)_e = k_e \frac{(T_E - T_P)}{h} \quad (2.6)$$

$$\left(k \frac{dT}{dx} \right)_w = k_w \frac{(T_P - T_W)}{h} \quad (2.7)$$

onde k_e e k_w representam a condutividade térmica nas faces leste e oeste, respectivamente. Substituindo as Eqs. (2.4) a (2.7) na Eq.(2.3), chega-se na equação discretizada para o modelo matemático, sendo

$$F \frac{(T_E - T_W)}{2} = k_e \frac{(T_E - T_P)}{h} - k_w \frac{(T_P - T_W)}{h} + \int_{x_w}^{x_e} S dx \quad (2.8)$$

Esta equação pode ser rearranjada como:

$$\left(\frac{k_e}{h} + \frac{k_w}{h} \right) T_P = \left(\frac{k_e}{h} - \frac{F}{2} \right) T_E + \left(\frac{k_w}{h} + \frac{F}{2} \right) T_W + \int_{x_w}^{x_e} S dx. \quad (2.9)$$

Identificando os coeficientes de T_E e T_W na Eq. (2.9) como a_e e a_w , e o coeficiente de T_P como a_P , pode-se escrever,

$$a_P T_P = a_e T_E + a_w T_W + b_P \quad (2.10)$$

onde as expressões para os coeficientes e termo fonte são apresentadas no Capítulo 4.

A Eq. (2.10) é a equação algébrica discretizada para problemas unidimensionais, onde a_P , a_e e a_w são coeficientes; e T_P , T_E e T_W são as temperaturas nos nós central (P), leste (E) e oeste (W). Os subscritos maiúsculos indicam a avaliação nos nós de controle e os subscritos minúsculos indicam a avaliação na face do volume de controle.

Diferentes funções de interpolação, quando aplicadas na Eq. (2.3), produzem erros de discretização de ordens diferentes e com magnitudes diferentes. Ou seja, a função de interpolação utilizada para fazer a aproximação numérica é uma das mais importantes variáveis para a qualidade da solução numérica, conforme observado em Marchi (2001).

O problema de advecção-difusão, aqui apresentado, será melhor detalhado no Capítulo 4 e analisado no Capítulo 5 que trata dos resultados deste trabalho.

2.3 ESQUEMAS PARA CÁLCULO DA CONDUTIVIDADE TÉRMICA

Nesta seção serão apresentados alguns esquemas para cálculo da condutividade térmica nas faces dos volumes de controle para o MVF. Pela maneira como o esquema é formulado ou pela base teórica utilizada, pode-se verificar a facilidade ou a dificuldade na implementação computacional.

Os esquemas apresentados têm características unidimensionais e a formulação é feita para a face leste “e” do VC genérico P . Para a face oeste “w”, a formulação é feita simplesmente considerando o valor de k_w do nó P igual ao valor de k_e do nó oeste (W).

2.3.1 Média aritmética de k - MAk

Dentre os esquemas mais utilizados para se determinar a condutividade térmica na face do VC, encontra-se a média aritmética da condutividade térmica na qual se considera uma distribuição linear da condutividade térmica entre dois nós vizinhos de uma superfície de controle (PATANKAR, 1980; LIU; MA, 2005; VOLLER; SWAMINATHAN, 1993). Neste trabalho, o esquema da média aritmética é chamado de MAk.

Para a face leste do VC, a condutividade térmica k_e para malhas uniformes é dada por:

$$k_e = \frac{k_P + k_E}{2} \quad (2.11)$$

Na Eq. (2.11), as condutividades térmicas k_P e k_E são avaliadas nos nós P e E da malha, respectivamente com a função dada $k(T)$.

O MAk é de fácil implementação e de baixo custo computacional. Indicado para problemas de condução de calor em placas com um único material, onde a função condutividade térmica é contínua e suave em relação à temperatura.

2.3.2 Média harmônica de k - MHk

Patankar (1980) apresentou o esquema da média harmônica das condutividades térmicas como uma alternativa ao MAk. O esquema da média harmônica, tratado como MHk, apresenta bons resultados em problemas com mudança brusca de condutividade térmica na superfície de controle sem exigir grande esforço computacional.

Para a face leste do VC, a condutividade térmica k_e é dada por:

$$k_e = \frac{2k_P k_E}{k_P + k_E} \quad (2.12)$$

sendo esta equação obtida para malhas uniformes.

Chang e Payne (1990) estudaram uma placa retangular constituída por dois materiais diferentes com a condutividade térmica linearmente dependente da temperatura. A solução analítica foi obtida através da introdução da transformação de Kirchhoff. Utilizando a solução exata como uma base de comparação, verifica-se que a avaliação da condutividade térmica na face do VC usando o esquema da média harmônica é, geralmente, melhor do que o uso da média aritmética. Também, os autores sugerem que se posicione um nó na interface entre os dois ma-

teriais, através de mudanças na malha. Isso faz com que se tenha dois materiais diferentes em um único VC e a derivada seria, desta forma, contínua.

A solução fechada do problema da condução de calor, utilizada nos trabalhos de Chang e Payne (1990, 1991), com as propriedades dos materiais dependentes da temperatura foi obtida no trabalho de Tao (1989). O problema é linearizado pela divisão do domínio em um número finito de subintervalos. Estes subintervalos são escolhidos suficientemente pequenos para que a função condutividade térmica do material seja considerada constante. A existência e unicidade da solução foi exaustivamente analisada e comprovada.

Em outro trabalho, Chang e Payne (1992) avaliaram os valores dos coeficientes de difusão para a face do VC, utilizando o método de volumes finitos, em problemas de transporte que incluem processos de difusão. A avaliação foi feita em um problema de condução de calor em uma placa composta com condutividade térmica linearmente dependente da temperatura, que tem solução de forma fechada. Desta vez, o objetivo era extrapolar a teoria para outras propriedades de transporte e propor arranjos alternativos da malha, de modo a minimizar os erros de aproximação. Verificou-se que o esquema da média harmônica tem desempenho melhor que o esquema da média aritmética para avaliar os coeficientes de difusão na interface. Mais uma vez, os resultados mostraram que posicionar o nó na interface entre os materiais leva a menores erros numéricos do que arranjos tradicionais.

Outro trabalho que avaliou esquemas para calcular a condutividade térmica foi Zhao *et al.* (2006). Neste trabalho, foi pesquisada a transferência de calor conjugada em cavidades com fontes de calor externa e interna. Incluiu-se a escala de velocidade, o coeficiente de difusão na interface fluido-sólido, escala de temperatura independente para várias fontes de calor e o acoplamento de velocidade e pressão para o corpo sólido imerso em fluido. Para tanto, foram utilizados dois arranjos de malha. No primeiro, a interface estava disposta na face dos VC, enquanto o segundo posicionava um nó na interface dos volumes. Em relação à avaliação dos esquemas numéricos para aproximar a condutividade térmica, concluiu-se que o esquema da média harmônica produziu resultados melhores do que os obtidos com o uso da média aritmética.

2.3.3 Média aritmética das temperaturas nodais - MAT

Tratado por MAT neste trabalho, Voller (2001) apresentou a idéia do esquema da média aritmética das temperaturas nodais entre dois nós vizinhos de uma face do VC (sem usar esta nomenclatura) quando propôs a integração numérica da função condutividade térmica pela regra do ponto médio (*midpoint rule*). Liu e Ma (2005) estudaram em detalhes este esquema e mostraram que ele é efetivo quando, para dois materiais diferentes, a mudança da condutividade

térmica ocorre no nó.

A definição do MAT é feita com base na variação linear da temperatura para nós consecutivos, assim,

$$T_e = \frac{T_P + T_E}{2} \quad (2.13)$$

onde T_e é a temperatura na face leste do VC.

Com a temperatura da face definida é possível calcular a condutividade térmica k_e , resultando em

$$k_e = k(T_e) \quad (2.14)$$

No trabalho de Liu e Ma (2005) vários métodos de interpolação para os coeficientes de difusão na face dos VC são discutidos e comparados com as soluções analíticas de dois problemas que envolvem difusão pura e advecção-difusão. Conforme os autores, verificou-se que o esquema da média harmônica não é tão preciso e confiável. Ainda, os autores afirmam que, na realidade, existem algumas situações em que simplesmente deixam de funcionar e não produzem resultados fisicamente realísticos. Na comparação, o MAT, proposto em Liu e Ma (2005), mostrou-se mais acurado que o esquema da média harmônica, principalmente quando, se existir uma mudança brusca na condutividade térmica, esta estiver posicionada em um nó da malha.

2.3.4 Média harmônica de k baseada na distribuição linear da temperatura nodal - LTMH

Este esquema foi apresentado por Marchi (2007), no qual o valor de k na face é obtido pela média harmônica das condutividades térmicas de dois pontos intermediários, “a” e “b”, localizados entre nós consecutivos de uma superfície de controle, conforme mostra a Fig. 2.3.

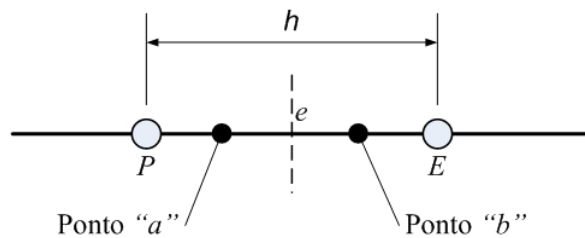


Figura 2.3: Pontos auxiliares “a” e “b” para a face leste do VC

A Fig. 2.4 apresenta a hipótese de variação linear com gradiente constante da temperatura entre T_E e T_P que é utilizada no LTMH. Nesta figura é feita a consideração que $T_E > T_P$ em volumes adjacentes à face “e”.

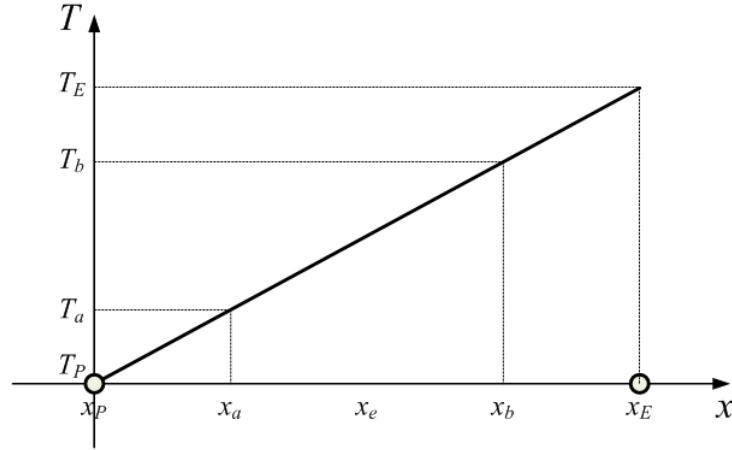


Figura 2.4: Hipótese para a variação da temperatura na face do VC para o LTMH

No LTMH, tomando como exemplo os nós consecutivos P e E , cuja face de controle é “e” (face leste), o ponto auxiliar “a” está localizado na posição intermediária entre o nó genérico P e a face “e”, e o ponto “b” na posição intermediária entre a face “e” e o nó E .

Da Fig 2.4, as temperaturas T_a e T_b são calculadas por

$$T_a = T_P + \frac{T_E - T_P}{4} = \frac{3T_P + T_E}{4} \quad (2.15)$$

$$T_b = T_P + 3\frac{T_E - T_P}{4} = \frac{T_P + 3T_E}{4} \quad (2.16)$$

Assim, as condutividades térmicas nos pontos a e b , respectivamente k_a e k_b , são dadas por:

$$k_a = k(T_a) \quad (2.17)$$

$$k_b = k(T_b) \quad (2.18)$$

Logo, a condutividade térmica na face “e” (k_e) pode ser obtida pela média harmônica de k_a e k_b , que resulta em

$$k_e = \frac{2k_a k_b}{k_a + k_b} \quad (2.19)$$

Pertschi (2008) analisou o LTMH e este esquema apresentou os melhores resultados em problemas advectivos. Pela formulação do LTMH, Eq. (2.19), observa-se que em problemas com dois materiais diferentes de condutividades térmicas constantes em cada um, os resultados reproduzem os obtidos com o esquema MHk.

2.3.5 Média harmônica de k baseada na distribuição linear por setores da temperatura nodal - TkMH

O TkMH foi proposto por Marchi (2007). Este esquema leva em consideração a mudança de condutividade térmica na face do VC para problemas de condução de calor com dois materiais diferentes.

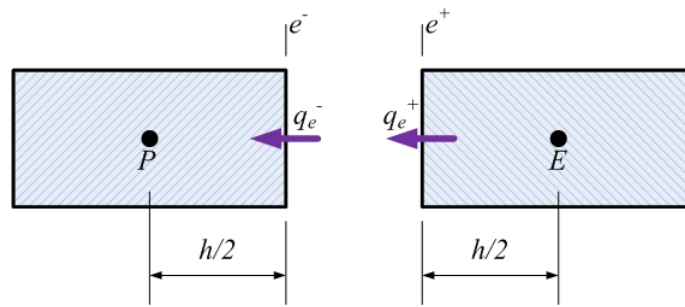


Figura 2.5: Esquema para o fluxo de calor em volumes de controle adjacentes

A base teórica do esquema usa a igualdade entre o fluxo de calor à esquerda da face “ e^- ”, (q_e^-), e à direita da face “ e^+ ”, (q_e^+). A Fig. 2.5 apresenta esquematicamente os fluxos de calor que entram e que saem na face “ e ”. Na figura, considera-se que $T_E > T_P$ e a malha como sendo uniforme.

Para problemas unidimensionais, o fluxo de calor é dado pela Eq. (1.2). A meta é calcular o fluxo de calor do lado esquerdo e direito da face “ e ”, e com esse valor, determinar a temperatura T_e que satisfaça o fluxo de calor nesta face. Não se está especialmente interessado na distribuição de temperaturas entre os nós e a face, portanto, é razoável supor que, entre eles, a temperatura varia de forma linear, conforme Fig. 2.6. Nessa hipótese, pode-se escrever

$$q_e^- = k_P \frac{(T_P - T_e)}{h/2} \quad (2.20)$$

$$q_e^+ = k_E \frac{(T_e - T_E)}{h/2} \quad (2.21)$$

No TkMH, entre os nós P e E (nós associados à face leste “ e ”), para o cálculo de T_e se considera a condutividade térmica do material entre o nó P e a face “ e ” como sendo constante e igual a k_P (valor da condutividade térmica avaliado no nó P). Para o material entre a face “ e ” e o nó E , o valor da condutividade térmica é considerado constante e igual a k_E (valor da condutividade térmica avaliado no nó E).

Em termos de fluxo de calor na face “ e ”, pode-se expressar a seguinte igualdade:

$$k_P \frac{(T_P - T_e)}{h/2} = k_E \frac{(T_e - T_E)}{h/2} \quad (2.22)$$

Da Eq. (2.22) é possível calcular a temperatura T_e que satisfaz esta condição, resultando em

$$T_e = \frac{k_P}{k_P + k_E} T_P + \frac{k_E}{k_P + k_E} T_E \quad (2.23)$$

Assim como no LTMH, definem-se dois pontos auxiliares “ a ” e “ b ”, ver Fig. 2.3, para os quais as temperaturas T_a e T_b são calculadas. Com a suposição de variação linear da temperatura, a Fig. 2.6 representa esta variação por um perfil linear com inclinações diferentes entre o nó P e a face “ e ”, e a face “ e ” e o nó E .

A condutividade térmica na face “ e ” (k_e) é calculada pela Eq. (2.19), onde as condutividades térmicas k_a e k_b são calculadas por:

$$k_a = k \left(\frac{T_P + T_e}{2} \right) \quad (2.24)$$

$$k_b = k \left(\frac{T_e + T_E}{2} \right) \quad (2.25)$$

onde $k(\cdot)$ denota a função condutividade na respectiva temperatura.

Pode-se verificar da Eq. (2.23) que T_e é dependente somente dos valores nodais das temperaturas e condutividades térmicas.

Para problemas com dois materiais e condutividades térmicas dependentes da temperatura, Pertschi (2008) mostrou que o TkMH apresentou os melhores resultados. Também, pode-se

observar pela formulação do TkMH que quando as condutividades térmicas dos materiais são constantes, este esquema reproduz o MHk.

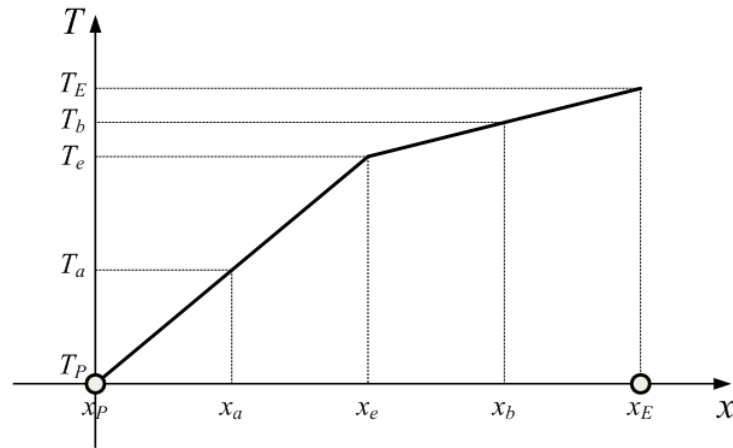


Figura 2.6: Hipótese para a variação da temperatura na face do VC para o TkMH

2.3.6 Transformação local de Kirchhoff usando quadratura gaussiana

A formulação apresentada nesta seção foi proposta por Voller (2001). Para desenvolvimento do esquema, é considerada a equação da condução de calor dada pela Eq. (1.5). Esta equação é não-linear para a condutividade térmica variável com a temperatura. Equações deste tipo são difíceis de serem resolvidas e, na maioria das vezes, não permitem a obtenção de solução pelas técnicas analíticas clássicas. Desta maneira, procedimentos que permitem a linearização da equação, quando possível, podem facilitar bastante o tratamento analítico.

Diante deste contexto, a Técnica da Transformada de Kirchhoff (ÖZISIK, 1993) pode ser utilizada como forma de linearização da equação diferencial. Chang e Payne (1991) utilizaram a Transformação de Kirchhoff para obter a solução analítica para o problema da condução de calor entre duas camadas de materiais com a condutividade térmica dependendo linearmente da temperatura e essa solução foi expressa na forma da série de Fourier. Também, Voller e Swaminathan (1993) propuseram um novo esquema numérico através da aproximação de Kirchhoff que, comparado com os esquema da média aritmética e harmônica, obteve desempenho melhor para problemas com mudança de fase, fazendo uma aproximação numérica para a região de fronteira entre fases (por exemplo, líquida e sólida).

Com o auxílio da Técnica da Transformada de Kirchhoff, a Eq. (1.5) pode ser transformada em uma equação diferencial mais simples. A técnica consiste em introduzir uma nova temperatura θ relacionada com a temperatura T do problema original pela seguinte transformação:

$$\theta = \frac{1}{k_{ref}} \int_{T_{ref}}^T k(T) dT \quad (2.26)$$

onde T_{ref} representa uma temperatura de referência e $k_{ref} = k(T_{ref})$. Desse modo, T_{ref} e k_{ref} são introduzidos simplesmente para dar ao valor θ a dimensão de temperatura e um valor definido. Uma relação direta da Eq. (2.26) é dada por

$$d\theta = \frac{k(T)}{k_{ref}} dT \quad (2.27)$$

assim,

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{k(T)}{k_{ref}} \frac{dT}{dx} \quad (2.28)$$

Inserindo as Eqs. (2.27) e (2.28) na Eq. (1.5), tem-se uma equação linear, que resulta em

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = 0 \quad (2.29)$$

Das considerações feitas sobre o tratamento da equação diferencial, pode-se extrair uma forma especial que permite calcular a condutividade térmica na face do VC. Assim, usando a aproximação por diferenças centrais em uma malha uniforme, a Eq. (2.28), para a face “e” de um nó genérico P , é dada por:

$$\frac{\theta_E - \theta_P}{h} = \frac{k_e}{k_{ref}} \frac{T_E - T_P}{h} \quad (2.30)$$

Empregando a Eq. (2.26) para os nós E e P , pode-se reescrever a Eq. (2.30) como,

$$\frac{1}{k_{ref}} \frac{\int_{T_{ref}}^{T_E} k(T) dT - \int_{T_{ref}}^{T_P} k(T) dT}{h} = \frac{k_e}{k_{ref}} \frac{T_E - T_P}{h} \quad (2.31)$$

e fazendo as simplificações, chega-se a

$$\int_{T_P}^{T_E} k(T) dT = k_e (T_E - T_P) \quad (2.32)$$

Assim, k_e pode ser calculada como

$$k_e = \frac{\int_{T_P}^{T_E} k(T) dT}{(T_E - T_P)} \quad (2.33)$$

Na Eq. (2.33), a integral do numerador pode ser feita analiticamente ou por algum processo de integração numérica (VOLLER, 2001). A integração numérica é uma aproximação da solução analítica e é dada por

$$\int_{T_P}^{T_E} k(T) dT \approx (T_E - T_P) \sum_{j=1}^J w_j k(g_j) \quad (2.34)$$

onde o índice J representa o número de pontos na quadratura, w_j são os pesos e g_j são os pontos de integração no intervalo $\{T_P, T_E\}$. Desta forma,

$$k_e = \sum_{j=1}^J w_j k(g_j) \quad (2.35)$$

Neste trabalho dois esquemas são colocados em destaque: um deles utiliza dois pontos na integração gaussiana e o outro três pontos, ver seções 2.3.6.1 e 2.3.6.2. Nestas seções, os pesos w_j e os pontos g_j são substituídos pelos respectivos valores para se obter uma forma fechada para a condutividade térmica. A acuracidade da integração numérica está diretamente relacionada com a classe da função \mathcal{C}^n ¹.

2.3.6.1 Transformação local de Kirchhoff usando 2 pontos na quadratura gaussiana - KG2P

Neste esquema, conforme apresentado em Voller (2001), o valor da condutividade térmica na face “e”, k_e , é dado por:

$$k_e = \frac{1}{2} \left[k \left(\frac{T_E + T_P}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{T_E - T_P}{2} \right) + k \left(\frac{T_E + T_P}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{T_E - T_P}{2} \right) \right] \quad (2.36)$$

onde $k(\cdot)$ denota a função condutividade na respectiva temperatura.

A Eq. (2.36) é obtida quando se substituem os pesos e a posição para dois pontos de Gauss na integração numérica (SZIDAROVSKY; YAKOWITZ, 1978; BURDEN; FAIRES, 2003).

¹Uma função f diz-se de classe \mathcal{C}^n num intervalo aberto Ω e escreve-se $f \in \mathcal{C}^n(\Omega)$ se as derivadas de f existirem até a ordem n e forem contínuas em Ω . Se todas as derivadas de ordem superior existirem, então a função diz-se **indefinidamente diferenciável** em Ω e escreve-se $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

2.3.6.2 Transformação local de Kirchhoff usando 3 pontos na quadratura gaussiana - KG3P

O valor da condutividade térmica na face “e”, k_e , conforme apresentado em Voller (2001), é obtida quando se substituem os pesos e as posições para três pontos de Gauss na Eq. (2.35), sendo dada por:

$$k_e = \left[\frac{5}{18} k \left(\frac{T_E + T_P}{2} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \frac{T_E - T_P}{2} \right) + \frac{8}{18} k \left(\frac{T_E + T_P}{2} \right) + \frac{5}{18} k \left(\frac{T_E + T_P}{2} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \frac{T_E - T_P}{2} \right) \right] \quad (2.37)$$

onde $k(\cdot)$ denota a função condutividade na respectiva temperatura.

Os pesos e posições para os pontos de Gauss podem ser encontrados em Szidarovszky e Yakowitz (1978) e Burden e Faires (2003).

2.3.7 Comentários gerais

De alguns dos trabalhos da literatura que propõem e avaliam esquemas para calcular a condutividade térmica nas faces dos volumes de controle, pode-se fazer os seguintes comentários:

- o esquema com melhor resultado em termos do erro de discretização depende do tipo do problema;
- os esquemas MAk, MAT, KG2P e KG3P deterioram a ordem efetiva da aproximação em problemas com dois materiais (PERTSCHI, 2008);
- algumas trabalhos, como por exemplo em Voller (2001) e Liu e Ma (2005), apresentam os resultados para apenas algumas malhas, o que pode comprometer resultados comparativos;
- para problemas com dois materiais diferentes e condutividades constantes, os esquemas baseados na Transformação de Kirchhoff têm os resultados equivalentes ao esquema MAk.

No Capítulo 5 são apresentados resultados detalhados e feitas comparações entre os esquemas descritos neste capítulo.

2.4 MÉTODOS DE SOLUÇÃO PARA O SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

Nas seções anteriores foi discutido como discretizar a equação de condução de calor. Este processo de discretização resulta em um sistema algébrico de equações que precisa ser resolvido. A complexidade e o tamanho do conjunto de equações depende da dimensão do problema, do número de nós na malha e dos métodos de aproximação utilizados no processo de discretização (FERZIGER; PERIC, 2002; VERSTEEG; MALALASEKERA, 1995).

Os métodos para resolução de sistemas de equações lineares são divididos em dois grupos: métodos diretos ou exatos (aqueles que forneceria a solução exata, não fossem os erros de arredondamento, com um número finito de operações) e métodos indiretos ou iterativos (aqueles que permitem obter a solução de um sistema com uma dada precisão através de um processo finito convergente) (BURDEN; FAIRES, 2003).

Para problemas unidimensionais, a solução do sistema de equações pode ser feito com métodos diretos. Neste trabalho utilizou-se o método direto TDMA. O método direto chamado de Algoritmo de Thomas ou “*Tridiagonal Matrix Algorithm*” (TDMA) é um método usado no caso de um sistema tridiagonal de equações algébricas. É, na verdade, uma modificação do método direto de Eliminação de Gauss ao se considerar apenas as três diagonais não nulas da matriz de coeficientes. Uma sub-rotina em FORTRAN para o método TDMA é dado em ANDERSON *et al.* (1997).

Neste trabalho, a solução do sistema de equações será feito utilizando o método TDMA. Assim, seja um sistema de equações dado por:

$$[A]_{M \times M} \{T\}_{M \times 1} = \{D\}_{M \times 1} \quad (2.38)$$

onde $[A]$ é a matriz dos coeficientes, $\{T\}$ é o vetor das M incógnitas e $\{D\}$ é o vetor dos termos independentes.

Em Maliska (2004) é feito o detalhamento do algoritmo TDMA e, ainda, é apresentada uma metodologia que pode ser utilizada para resolver problemas bidimensionais e tridimensionais.

2.5 GENERALIDADES SOBRE A VERIFICAÇÃO DAS SOLUÇÕES NUMÉRICAS

O processo que quantifica o erro numérico é denominado por Oberkampf e Blottner (1998), Roache (1998), AIAA (1998); Marchi (2001) e Roy *et al.* (2003) de **verificação**. O objetivo da verificação é determinar em que medida um modelo matemático é resolvido adequadamente

através de um método numérico. Note que, dentro destas definições, uma solução numérica verificada com a solução analítica, não estará obrigatoriamente validada, a menos que o modelo matemático não possua erro em relação à solução verdadeira do fenômeno.

Na determinação da solução de um modelo matemático por meio de um método numérico encontram-se diversas fontes de erros. Estes erros estão ligados ao processo de análise e resolução do problema. As diversas fontes, conforme apresentado em Marchi (2001), são: erros de truncamento (E_T), erros de iteração (E_n), erros de arredondamento (E_π) e erros de programação (E_p), assim,

$$E(\phi) = E(E_T, E_n, E_\pi, E_p) \quad (2.39)$$

onde ϕ é a variável de interesse e E é o erro numérico.

Erros de truncamento são originários do processo de discretização de um modelo matemático (ANDERSON *et al.*, 1997; FERZIGER; PERIC, 2002; ROACHE, 1998). Ao erro de truncamento está relacionado o conceito de consistência de um método numérico. Quando, para malhas numéricas bastante refinadas, o erro de truncamento se torna nulo, diz-se que o método numérico é **consistente**. Ou seja, a equação discretizada deve tender a equação original, quando a malha tende a zero (MALISKA, 2004). A consistência, contudo, não garante que a solução do problema discretizado seja a solução exata para malhas extremamente refinadas; para tanto, é necessário que haja estabilidade do método. Diz-se que um método numérico é **estável** quando os erros não crescem em magnitude podendo, assim, desestabilizar a obtenção da solução (ANDERSON *et al.*, 1997; MALISKA, 2004). Consistência e estabilidade são condições necessárias e suficientes para a convergência. A solução numérica é **convergente** quando é estável e tende para a solução das equações diferenciais quando a malha é refinada (MALISKA, 2004).

Erros de iteração estão associados à utilização de métodos iterativos na solução dos sistemas de equações algébricas. Define-se o erro de iteração como sendo a diferença entre a solução exata e a solução do sistema de equações em uma dada iteração (FERZIGER; PERIC, 2002; ROACHE, 1998). Conforme Marchi (2001), alguns fatores que geram erros de iteração são:

1. o emprego de métodos iterativos para resolver as equações discretizadas, ou o sistema de equações algébricas;
2. o uso de métodos segregados na obtenção da solução de modelos matemáticos constituídos por mais de uma equação diferencial;

3. a existência de não-linearidades no modelo matemático; e
4. a utilização de métodos *multigrid* na solução do sistema de equações algébricas.

Existem problemas muito simples que não apresentam erros de iteração. Nesses problemas, a equação diferencial é linear e o sistema de equação é resolvido com um método direto, por exemplo, o TDMA.

Os erros de arredondamento, segundo Marchi (2001), são os erros que ocorrem principalmente devido à representação finita dos números reais nas computações. Eles dependem do compilador (*software*) usado para gerar o código computacional e do computador (*hardware*) empregado em sua execução. Estão relacionados ao número de algarismos (*bytes*) usados para representar as variáveis nos computadores e ao número de termos empregados no cálculo de séries infinitas de funções pré-definidas da linguagem de programação. Na linguagem Fortran90, por exemplo, pode-se usar precisão simples com quatro *bytes*, precisão dupla com oito *bytes* ou precisão quádrupla com 16 *bytes* por variável do tipo real. Quanto maior é a precisão usada para representar as variáveis, menores são os erros de arredondamento; entretanto, maior é a memória computacional necessária para o armazenamento destas variáveis.

Erros de programação são inerentes ao programador e à utilização do código computacional implementado. Conforme Roache (1998), os erros de programação incluem:

1. os erros resultantes do uso incorreto de um modelo numérico na aproximação de um modelo matemático;
2. os erros gerados na implementação do modelo numérico num programa computacional;
3. os erros cometidos no uso do programa computacional durante a obtenção da solução numérica; e
4. qualquer outra eventual fonte de erro.

2.5.1 Verificação das soluções numéricas

A avaliação dos métodos de cálculo da condutividade térmica é feita pela determinação do erro numérico. O erro numérico (E) é a diferença entre a solução exata (Φ) da variável de interesse e a sua solução numérica (ϕ) obtida através da simulação (FERZIGER; PERIC, 2002), isto é

$$E = \Phi - \phi \quad (2.40)$$

O erro numérico quando calculado através da Eq. (2.40), mas sem E_n , E_π e E_p , passa a ser denominado de erro de discretização (E), de acordo com Ferziger e Peric (2002). Esses erros de discretização, quando gerados pelos erros de truncamento, podem ser estimados. As estimativas dos erros de discretização são, basicamente, divididas em dois grupos: estimativas *a priori* e *a posteriori* da solução numérica (SZABÓ; BABUSKA, 1991).

As estimativas de erro *a priori* proporcionam uma análise qualitativa do erro de discretização antes mesmo de se obter uma solução numérica. O objetivo de uma estimativa *a priori* é obter a ordem assintótica da equação diferencial discretizada. Com esta estimativa, antes de se obter qualquer solução numérica, é possível prever o comportamento assintótico do erro de discretização com relação ao refinamento da malha. Conforme Marchi (2001), também é possível avaliar qual é o efeito da redução do tamanho dos elementos da malha sobre o erro de discretização da solução numérica.

As estimativas de erro *a posteriori* são usadas para estimar a magnitude do erro de discretização. Existem vários métodos que podem ser empregados e eles podem ser divididos em dois grandes conjuntos. No primeiro, as estimativas de erro são baseadas na solução numérica obtida numa única malha; em geral, o método dos elementos finitos se enquadra neste conjunto. No segundo conjunto, as estimativas de erro são baseadas nas soluções numéricas obtidas em malhas múltiplas. Em geral, os métodos de diferenças finitas e de volumes finitos se enquadram neste conjunto (MARCHI, 2001).

A equação geral do erro de discretização unidimensional, admitindo por simplicidade um espaçamento uniforme (h) entre os nós, é dada genericamente por (RICHARDSON, 1910; ROACHE, 1998; FERZIGER; PERIC, 2002; MARCHI, 2001)

$$E(\phi) = C_1 h^{p_L} + C_2 h^{p_2} + C_3 h^{p_3} + C_4 h^{p_4} + \dots \quad (2.41)$$

onde os coeficientes C_i podem ser positivos ou negativos e ser função da variável dependente e de suas derivadas, isto é, podem variar com a coordenada x , mas são independentes do tamanho (h) dos elementos da malha. Por definição, as ordens verdadeiras (p_V) são os expoentes de h dos termos não-nulos na Eq. (2.41). Esses expoentes são dados por p_L , p_2 , p_3 , p_4 e etc. As ordens verdadeiras seguem a relação $p_L < p_2 < p_3 < p_4 < \text{etc.}$ São números inteiros positivos que geralmente constituem uma série aritmética, isto é, a diferença entre ordens subsequentes é constante.

E ainda, o menor expoente de h na Eq. (2.41) é chamado de ordem assintótica (p_L). É um número inteiro positivo e satisfaz a condição $p_L \geq 1$. Quando o tamanho (h) dos elementos da

malha tende a zero, ou seja, $h \rightarrow 0$, o primeiro termo do erro de discretização é o principal componente, isto é, ele domina o valor total de E . Conhecer a ordem do erro numérico permite a avaliação da redução do erro em função do tamanho h dos elementos da malha.

Para que o erro numérico seja gerado apenas pelo erro de truncamento, é necessário que se atenda aos seguintes requisitos:

- os modelos matemáticos abordados sejam simples o suficiente para evitar erros de programação;
- a precisão computacional adotada para armazenamento das variáveis seja adequada para minimizar erros de arredondamento;
- no caso de soluções iterativas, o número de iterações seja suficiente para se atingir o erro de máquina.

Neste trabalho, o uso de modelos matemáticos de baixa complexidade, o uso de precisão quádrupla para armazenamento dos valores das variáveis e a aplicação de processos iterativos até o erro de máquina, garantem que todos os requisitos acima são atendidos e todas as análises feitas ficam restritas ao estudo dos erros de discretização.

2.5.1.1 Ordem assintótica da função de interpolação CDS

A seguir será ilustrado como determinar *a priori* o erro de truncamento quando se utiliza uma função de interpolação do tipo CDS.

Para uma função de interpolação, tanto a obtenção das aproximações numéricas quanto seus erros de truncamento podem ser feitos a partir da série de Taylor, que é uma série infinita (FORTUNA, 2000; KREYSZIG, 1999).

A aproximação numérica do tipo CDS para os termos da Eq.(2.3), que representa o modelo matemático geral discretizado, pode ser obtida pela série de Taylor. A apresentação da aproximação numérica e dos erros de truncamento será feita para a face “e”, ou seja, considerando a expansão da série de Taylor a partir da face “e”. Assim, aplicando a série de Taylor, tem-se para os nós P e E :

$$\Phi_P = \Phi_e - \Phi_e^i \frac{h}{2} + \Phi_e^{ii} \frac{h^2}{8} - \Phi_e^{iii} \frac{h^3}{48} + \Phi_e^{iv} \frac{h^4}{384} + \dots \quad (2.42)$$

$$\Phi_E = \Phi_e + \Phi_e^i \frac{h}{2} + \Phi_e^{ii} \frac{h^2}{8} + \Phi_e^{iii} \frac{h^3}{48} + \Phi_e^{iv} \frac{h^4}{384} + \dots \quad (2.43)$$

onde Φ é a variável dependente no modelo matemático, Φ_E e Φ_P são os valores analíticos exatos obtidos com a expansão da série de Taylor a partir da face “e”, onde são conhecidos os valores analíticos exatos de Φ_e e suas derivadas ($\Phi_e^i, \Phi_e^{ii}, \Phi_e^{iii}, \dots, \Phi_e^M$). O sobrescrito “i” indica a ordem da derivada que está sendo avaliada. As Eqs. (2.42) e (2.43) são válidas se Φ é uma função contínua de x no intervalo fechado $[a, b]$, com derivadas contínuas até a ordem M neste mesmo intervalo. Ainda, o ponto a partir do qual se faz a expansão deve pertencer ao intervalo fechado $[a, b]$.

Fazendo a soma das Eqs. (2.42) e (2.43), chega-se a

$$\Phi_P + \Phi_E = 2 \Phi_e + 2 \Phi_e^{ii} \frac{h^2}{8} + 2 \Phi_e^{iv} \frac{h^4}{384} + \dots \quad (2.44)$$

Logo, o valor de Φ na face “e” (Φ_e) é dado por:

$$\Phi_e = \frac{\Phi_P + \Phi_E}{2} - \Phi_e^{ii} \frac{h^2}{8} - \Phi_e^{iv} \frac{h^4}{384} - \dots \quad (2.45)$$

A hipótese de um perfil linear entre P e E oferece a seguinte aproximação para Φ_e :

$$\Phi_e \approx \frac{\Phi_P + \Phi_E}{2} \quad (2.46)$$

com o erro de truncamento E_T dado por:

$$E_T = - \Phi_e^{ii} \frac{h^2}{8} - \Phi_e^{iv} \frac{h^4}{384} - \dots \quad (2.47)$$

Para a derivada primeira da variável na face “e”, deve-se subtrair a Eq. (2.43) da (2.42), assim,

$$\Phi_E - \Phi_P = + 2 \Phi_e^i \frac{h}{2} + 2 \Phi_e^{iii} \frac{h^3}{48} + \dots \quad (2.48)$$

Logo, a derivada primeira é dada por:

$$\Phi_e^i = \frac{\Phi_E - \Phi_P}{h} - \Phi_e^{iii} \frac{h^2}{24} + \dots \quad (2.49)$$

A hipótese de um perfil linear entre os nós P e E também oferece a aproximação mais simples do gradiente, o qual é necessário para a avaliação dos fluxos difusivos (FERZIGER; PERIC, 2002):

$$\Phi_e^i = \left(\frac{d\Phi}{dx} \right)_e \approx \frac{\Phi_E - \Phi_P}{h} \quad (2.50)$$

O erro de truncamento para a derivada primeira é dado por:

$$E_T = - \Phi_e^{iii} \frac{h^2}{24} + \dots \quad (2.51)$$

Comparando as Eqs. (2.47) e (2.51) com a Eq. (2.41), pode-se perceber que a função de interpolação CDS possui ordem assintótica (p_L) igual a dois.

2.5.1.2 Ordem efetiva da aproximação

Conforme Marchi (2001), quando se conhece o erro numérico é possível calcular a ordem efetiva do erro de discretização (p_E). Assim, p_E é definida como a inclinação local da curva do erro de discretização (E) *versus* o tamanho da malha (h) em um gráfico logarítmico. A ordem efetiva mede a taxa com que a solução numérica converge para a solução exata. Seu cálculo permite verificar na prática, isto é, *a posteriori* das soluções numéricas, se à medida que h é reduzido, a ordem do erro de discretização das soluções numéricas tende à ordem assintótica dos erros de truncamento, ordem esta que é um resultado teórico, obtido *a priori* das soluções numéricas. Matematicamente, a ordem efetiva (p_E) é obtida a partir de

$$C_E h^{p_E} = E(\phi) \quad (2.52)$$

onde C_E é um coeficiente que é admitido ser independente de h .

Conforme Marchi (2001), quando se conhece a solução analítica do problema, é possível determinar a ordem efetiva do erro (p_E) baseada em duas soluções numéricas.

Aplicando-se a Eq. (2.52) a duas malhas diferentes, h_1 (malha fina) e h_2 (malha grossa), tem-se

$$C_E h_1^{p_E} = E(\phi_1) \quad (2.53)$$

$$C_E h_2^{p_E} = E(\phi_2) \quad (2.54)$$

onde ϕ_1 e ϕ_2 são as soluções numéricas obtidas com as malhas fina e grossa, respectivamente.

As Eqs. (2.53) e (2.54) formam um sistema de duas equações a duas incógnitas: C_E e p_E . Nestas duas equações, $E(\phi_1)$ e $E(\phi_2)$, h_1 e h_2 são conhecidos. Assim, este sistema de equações pode ser resolvido, obtendo

$$p_E = \frac{\log \left[\frac{E(\phi_2)}{E(\phi_1)} \right]}{\log(r)} \quad (2.55)$$

onde a razão de refino de malha (r) é

$$r = \frac{h_2}{h_1} \quad (2.56)$$

2.5.2 Intervalo de convergência da ordem efetiva

Marchi (2001) apresenta o conceito de intervalo de convergência da ordem aparente. Maiores detalhes sobre a definição de ordem aparente e incerteza de uma solução numérica podem ser obtidos neste mesmo trabalho. Aqui, este conceito será utilizado para definir o intervalo de convergência da ordem efetiva.

Após a avaliação da ordem efetiva do erro de discretização, é possível definir dois tipos de curvas esperadas quando o tamanho (h) dos elementos da malha tende a zero, isto é, quando $h \rightarrow 0$: intervalos subconvergente e superconvergente. Diz-se que o intervalo é convergente quando a ordem efetiva (p_E) converge monotonicamente para a ordem assintótica (p_L) do erro da solução numérica quando $h \rightarrow 0$. Portanto, subconvergente refere-se ao caso dessa convergência se dar com valores de p_E inferiores a p_L , enquanto que superconvergente refere-se ao caso da convergência ocorrer com valores de p_E superiores a p_L .

2.5.2.1 Intervalo subconvergente

O intervalo subconvergente da ordem efetiva é definido como o intervalo $0 \leq h \leq h_C$ onde $p_E(h)$ é positiva, crescente com a diminuição do tamanho (h) dos elementos da malha, e menor ou igual à ordem assintótica (p_L). Assim,

$$0 < p_E(h_C) \leq p_E(h) \leq p_L \quad (0 \leq h \leq h_C) \quad (2.57)$$

$$\frac{dp_E}{dh} \leq 0 \quad (2.58)$$

onde h_C é o valor máximo de h no intervalo subconvergente, ou seja, é o valor máximo de h até o qual as Eqs. (2.57) e (2.58) são válidas.

A Fig. 2.7 apresenta um esboço genérico para o intervalo subconvergente da ordem efetiva.

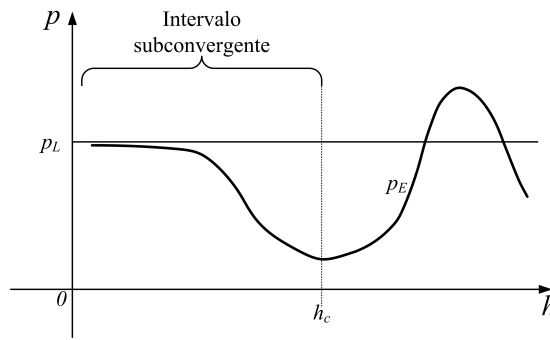


Figura 2.7: Definição do intervalo subconvergente da ordem efetiva

Fonte: adaptado de Marchi (2001)

2.5.2.2 Intervalo superconvergente

O intervalo superconvergente da ordem efetiva é definido como o intervalo $0 \leq h \leq h_C$ onde $p_E(h)$ é positiva, decrescente com a diminuição do tamanho (h) dos elementos da malha, e maior ou igual à ordem assintótica (p_L). Assim,

$$0 < p_L \leq p_E(h) \leq p_E(h_C) \quad (0 \leq h \leq h_C) \quad (2.59)$$

$$\frac{dp_E}{dh} \geq 0 \quad (2.60)$$

onde h_C é o valor máximo de h no intervalo superconvergente, ou seja, é o valor máximo de h até o qual as Eqs. (2.59) e (2.60) são válidas.

A Fig. 2.8 apresenta um esboço genérico para o intervalo superconvergente da ordem efetiva.

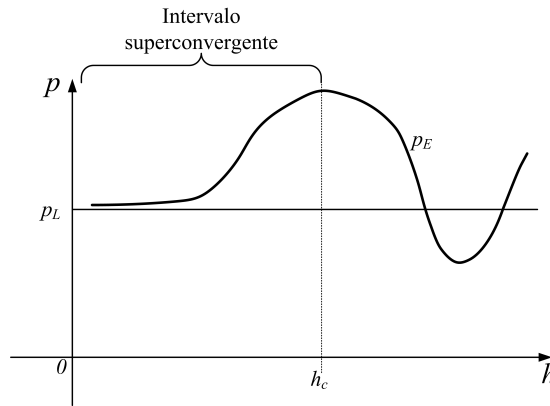


Figura 2.8: Definição do intervalo superconvergente da ordem efetiva

Fonte: adaptado de Marchi (2001)

2.5.2.3 Considerações sobre o intervalo de convergência

Quando o erro numérico é decorrente apenas do erro de discretização, é possível supor que no intervalo de convergência o primeiro termo da equação geral do erro de discretização (E), Eq. (2.41), passa a dominar o valor total de E , isto é, quando o coeficiente C_E da Eq. (2.52) é aproximadamente igual ao coeficiente C_1 da Eq. (2.41). O ponto a partir do qual isto é observado é o valor máximo de h que define o intervalo convergente, isto é, h_C , sendo este, dependente da complexidade do modelo matemático e do modelo numérico empregado em sua solução (MARCHI, 2001).

No Capítulo 5 são apresentadas várias curvas de p_E versus h . Em particular, na Seção 5.1.3, para vários esquemas avaliados, tem-se $p_E = p_L$, qualquer que seja h . Neste caso, diz-se que o intervalo é convergido.

O método para a determinação do valor de h_C não é objeto de estudo neste trabalho, mas o conhecimento de seu valor, feito por inspeção nas curvas de p_E versus h , para cada um dos esquemas de cálculo da condutividade térmica na face do VC permite estabelecer um critério para ordenação desses esquemas. Assim, a ordenação de melhor ou pior esquema para o cálculo de k é feita para o intervalo de convergência.

3 NOVOS ESQUEMAS PARA CALCULAR A CONDUTIVIDADE TÉRMICA

Neste capítulo são apresentadas as formulações para cinco novos esquemas para cálculo da condutividade térmica nas faces dos volumes de controle. Todos esses esquemas consideram a existência de dois meios (mudança abrupta na condutividade térmica) no domínio de cálculo.

3.1 SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA DOIS MEIOS COM CONDUTIVIDADES TÉRMICAS LINEARES - LK2M

Este esquema é proposto para aproximar a condutividade térmica na face do VC quando existem dois materiais diferentes, sendo cada um deles dependente da temperatura. Considera-se que a mudança brusca na condutividade térmica ocorre na interface, conforme apresenta a Fig. 3.1.

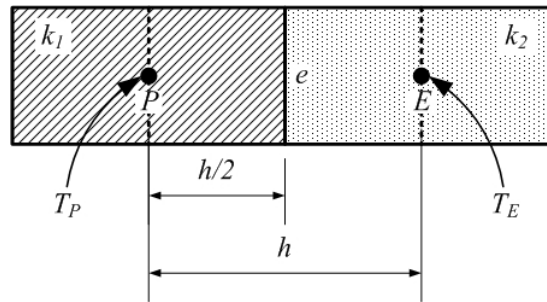


Figura 3.1: Volumes de controle adjacentes com materiais diferentes

Considerando a Transformação de Kirchhoff, com base na aproximação dos termos da variável primária por diferença central em uma malha uniforme, para a face “e” de um nó genérico P , a Eq. (2.28) pode ser reescrita para cada um dos volumes adjacentes a esta face, assim,

$$\frac{\theta_e - \theta_P}{h/2} = \frac{k_e}{k_{1ref}} \frac{T_e - T_P}{h/2} \quad (3.1)$$

$$\frac{\theta_E - \theta_e}{h/2} = \frac{k_e}{k_{2ref}} \frac{T_E - T_e}{h/2} \quad (3.2)$$

Inserindo a Transformação de Kirchhoff, Eq. (2.26), pode-se reescrever as Eqs. (3.1) e (3.2) como sendo

$$\frac{1}{k_{1ref}} \frac{\int_{T_{ref}}^{T_e} k_1(T) dT - \int_{T_{ref}}^{T_P} k_1(T) dT}{h/2} = \frac{k_e}{k_{1ref}} \frac{T_e - T_P}{h/2} \quad (3.3)$$

$$\frac{1}{k_{2ref}} \frac{\int_{T_{ref}}^{T_E} k_2(T) dT - \int_{T_{ref}}^{T_e} k_2(T) dT}{h/2} = \frac{k_e}{k_{2ref}} \frac{T_E - T_e}{h/2} \quad (3.4)$$

Fazendo as simplificações nas Eqs. (3.3) e (3.4), têm-se

$$\int_{T_P}^{T_e} k_1(T) dT = k_e [T_e - T_P] \quad (3.5)$$

$$\int_{T_e}^{T_E} k_2(T) dT = k_e [T_E - T_e] \quad (3.6)$$

O valor de k_e pode ser explicitado a partir da soma das Eqs. (3.5) e (3.6), assim

$$k_e = \frac{\int_{T_P}^{T_e} k_1(T) dT + \int_{T_e}^{T_E} k_2(T) dT}{(T_E - T_P)} \quad (3.7)$$

No esquema Lk2M, as integrais no numerador da Eq. (3.7) podem ser obtidas utilizando a integração numérica pela regra do retângulo. Para tanto, definem-se dois pontos auxiliares “a” e “b”, ver Fig. 2.3, para os quais são calculadas as condutividades térmicas, k_a e k_b , pelas Eqs. (2.24) e (2.25), respectivamente. Ainda, a temperatura T_e é calculada pela Eq. (2.23). Dessa forma, a condutividade térmica k_e , na Eq. (3.7), é calculada por:

$$k_e = \frac{k_a [T_e - T_P] + k_b [T_E - T_e]}{T_E - T_P} \quad (3.8)$$

Voller (2001) apresenta formulação semelhante para dois materiais com valores constantes e diferentes em ambos os lados da interface dos volumes de controle. O esquema Lk2M permite maior flexibilidade, sendo capaz de calcular a condutividade térmica na face do VC mesmo quando os valores das condutividades térmicas não são constantes em ambos os lados da interface dos VC.

Quando a condutividade térmica é independente da temperatura, pode-se substituir $k_a = k_P$ e $k_b = k_E$ na Eq. (3.8). Com a temperatura T_e da Eq. (2.23), chega-se a

$$k_e = 2 \frac{k_E k_P}{k_P + k_E} \quad (3.9)$$

que é equivalente ao esquema MHk.

3.2 TRANSFORMAÇÃO LOCAL DE KIRCHHOFF PARA DOIS MEIOS USANDO 2 PONTOS NA QUADRATURA GAUSSIANA EM CADA MEIO - KG4P

O esquema KG4P foi proposto com base no esquema Lk2M, fazendo a integração do numerador da Eq. (3.7) pela quadratura de Gauss com dois pontos de integração em cada um dos dois meios. Assim, a condutividade térmica k_e pode ser calculada por:

$$k_e = \frac{\int_{T_P}^{T_e} k_1(T) dx + \int_{T_e}^{T_E} k_2(T) dx}{T_E - T_P} \quad (3.10)$$

Na Eq. (3.10), $k_1(T)$ e $k_2(T)$ representam as funções condutividade térmica para cada um dos materiais envolvidos. Se a análise for feita para um mesmo material, facilmente é estabelecida uma relação para o cálculo de k_e . Para o numerador da Eq. (3.10), considere a integração numérica pela quadratura de Gauss com dois pontos de integração. Assim,

$$\int_{T_r}^{T_s} k(T) dx \approx [T_s - T_r] \left[\frac{1}{2} k \left(\frac{T_s + T_r}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{T_s - T_r}{2} \right) + \frac{1}{2} k \left(\frac{T_s + T_r}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{T_s - T_r}{2} \right) \right] \quad (3.11)$$

onde $\{T_r, T_s\}$ representa um intervalo genérico para cada uma das integrais da Eq. (3.10) e $k(\cdot)$ denota a função condutividade na respectiva temperatura.

A Eq. (3.11) permite maior acuracidade na avaliação da integração numérica quando comparada à integração numérica pela regra do retângulo. A integração numérica é exata, desconsiderando os erros de arredondamento, para funções condutividade térmica de classe até \mathcal{C}^3 . As Eqs. (G.19) e (G.20), apresentadas no Apêndice G, representam a integração numérica entre o nó P e a face “e” e a face “e” e o nó E , respectivamente.

3.3 TRANSFORMAÇÃO LOCAL DE KIRCHHOFF PARA DOIS MEIOS USANDO 3 PONTOS NA QUADRATURA GAUSSIANA EM CADA MEIO - KG6P

Seguindo a proposição do esquema KG4P, o esquema KG6P foi desenvolvido utilizando três pontos de integração na quadratura de Gauss em cada um dos dois meios. Dependendo

do grau de continuidade da função condutividade térmica, quanto mais pontos na integração numérica menor será o erro de aproximação. Assim, a condutividade térmica k_e é calculada na Eq. (3.10), onde cada uma das integrais pode ser calculada fazendo:

$$\int_{T_r}^{T_s} k(T) dx \approx [T_s - T_r] \left[\frac{5}{18} k \left(\frac{T_s + T_r}{2} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \frac{T_s - T_r}{2} \right) + \frac{8}{18} k \left(\frac{T_s + T_r}{2} \right) + \frac{5}{18} k \left(\frac{T_s + T_r}{2} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \frac{T_s - T_r}{2} \right) \right] \quad (3.12)$$

onde $\{T_r, T_s\}$ representa um intervalo genérico para cada uma das integrais da Eq. (3.10) e $k(\cdot)$ denota a função condutividade na respectiva temperatura.

O esquema KG6P difere do esquema KG4P apenas na acuracidade de cálculo da integração numérica. Assim, com o esquema KG6P é possível fazer a integração numérica exata, desconsiderando possíveis erros de arredondamento, para funções condutividade térmica de classe até \mathcal{C}^5 . As Eqs. (G.21) e (G.22), apresentadas no Apêndice G, representam a integração numérica entre o nó P e a face “e” e a face “e” e o nó E , respectivamente.

3.4 SOLUÇÃO ANALÍTICA DE k BASEADO NO PROBLEMA DE ADVECÇÃO-DIFUSÃO - AD1D

O esquema AD1D foi projetado para calcular a condutividade térmica na face do VC em problemas de advecção-difusão utilizando a solução exata como uma aproximação para a temperatura T_e na interface. Este esquema, pela base teórica da sua formulação, será utilizado somente na solução do Problema E que está descrito na Tab. 4.1.

A solução exata para o problema de advecção-difusão, dado pela Eq. (2.1), considerando F e k constantes e S nulo, é apresentada em Patankar (1980), sendo,

$$T = T_P + \frac{\exp(P_e x/h) - 1}{\exp(P_e) - 1} (T_E - T_P) \quad (3.13)$$

onde P_e é o número de Peclet. A solução apresentada na Eq. (3.13) para o problema de advecção-difusão é válida para o intervalo entre os nós P e E . Assim, x deve variar entre x_E e x_P .

O número de Peclet da malha é definido por

$$P_e = \frac{F h}{k} \quad (3.14)$$

Substituindo $x = h/2$ e $k = k(T_e)$ na Eq. (3.13), obtém-se a solução para a temperatura na face “e”, assim,

$$T_e = T_P + \frac{\exp\left(\frac{F h}{2 k(T_e)}\right) - 1}{\exp\left(\frac{F h}{k(T_e)}\right) - 1} (T_E - T_P) \quad (3.15)$$

Pode-se observar da Eq. (3.15) que a solução para T_e é dependente dela mesma porque é necessário calcular a condutividade térmica $k_e = k(T_e)$. Neste caso, o cálculo de T_e deve ser feito por um processo iterativo bastando, para tanto, poucas iterações (neste trabalho foram utilizadas 3 iterações). Sugere-se como valor inicial para a iteração de T_e utilizar a Eq. (2.23).

Após encontrar T_e na Eq.(3.15), pode-se calcular as condutividades térmicas, k_a e k_b , pelas Eqs. (2.24) e (2.25), respectivamente, para dois pontos intermediários, “a” e “b”, localizados entre nós consecutivos (ver Fig. 2.3). A condutividade térmica k_e na face do VC é calculada através da Eq.(3.8).

3.5 SOLUÇÃO ANALÍTICA DE k BASEADO NO PROBLEMA DE DIFUSÃO PARA DOIS MEIOS - DK1D

Neste esquema, o cálculo da condutividade térmica na face do VC será feito com base na solução analítica para dois meios com condutividades térmicas diferentes e dependentes linearmente da temperatura. Um exemplo para esta situação pode ser observado na Fig. 3.1.

A formulação do problema é dada por:

$$\frac{d}{dx} \left(k_1(T_1) \frac{dT_1}{dx} \right) = 0, \quad x_P \leq x \leq x_e \quad (3.16)$$

$$\frac{d}{dx} \left(k_2(T_2) \frac{dT_2}{dx} \right) = 0, \quad x_e \leq x \leq x_E \quad (3.17)$$

onde T_1 e T_2 são as funções para a temperatura em cada um dos meios, sendo que estas funções são dependentes da coordenada espacial x . Ainda, x_P , x_e e x_E são as coordenadas do nó P , da face e , e do nó E , respectivamente. As condutividades térmicas são $k_1(T_1)$ e $k_2(T_2)$.

Para a face “e”,

$$T_1(x_e) = T_2(x_e) \quad (3.18)$$

$$k_1(T_1) \left(\frac{dT_1}{dx} \right) \Big|_{x=x_e} = k_2(T_2) \left(\frac{dT_2}{dx} \right) \Big|_{x=x_e} \quad (3.19)$$

O problema apresentado nas Eqs. (3.16) e (3.17) pode ser modificado com base na Transformação de Kirchhoff, Eq. (2.26). Assim, de acordo com a Eq. (2.29), o problema semelhante a ser resolvido é dado por

$$\frac{d^2 \theta_1}{dx^2} = 0, \quad x_P \leq x \leq x_e \quad (3.20)$$

$$\frac{d^2 \theta_2}{dx^2} = 0, \quad x_e \leq x \leq x_E \quad (3.21)$$

onde θ_1 e θ_2 são as Transformações de Kirchhoff para T_1 e T_2 , respectivamente.

A solução geral da Eq. (3.20) é dada por

$$\theta_1 = C_1(x - x_P) + C_2 \quad (3.22)$$

e, a solução geral da Eq. (3.21)

$$\theta_2 = C_3(x - x_e) + C_4 \quad (3.23)$$

onde C_i representam as constantes de integração.

Da Transformação de Kirchhoff, Eq. (2.26), pode-se obter a constante C_2 da Eq. (3.22) para a coordenada $x = x_P$ como sendo,

$$C_2 = \frac{1}{k_{1ref}} \int_{T_{ref}}^{T_P} k_1(T_1) dT_1 \quad (3.24)$$

O fluxo de calor na face, $x = x_e$, é dado por

$$q|_{x=x_e} = -k_1(T_1) \left(\frac{dT_1}{dx} \right) \Big|_{x=x_e} = -k_2(T_2) \left(\frac{dT_2}{dx} \right) \Big|_{x=x_e} \quad (3.25)$$

Segue da Eq. (2.28) que

$$\frac{dT}{dx} = \frac{k_{ref}}{k(T)} \frac{d\theta}{dx} \quad (3.26)$$

Introduzindo a Eq.(3.26) na Eq. (3.25) para T_1 e, observando na Eq. (3.22) que $d\theta_1/dx = C_1$, tem-se que

$$C_1 = -\frac{q|_{x=x_e}}{k_{1ref}} \quad (3.27)$$

Assim, a solução da Eq. (3.20) é

$$\theta_1 = -\frac{q|_{x=x_e}}{k_{1ref}}(x - x_P) + \frac{1}{k_{1ref}} \int_{T_{ref}}^{T_P} k_1(T_1) dT_1 \quad (3.28)$$

Introduzindo a Eq.(3.26) na Eq. (3.25) para T_2 e, observando na Eq. (3.23) que $d\theta_2/dx = C_3$, tem-se que

$$C_3 = -\frac{q|_{x=x_e}}{k_{2ref}} \quad (3.29)$$

Pode-se obter a constante C_4 para a coordenada $x = x_E$ substituindo C_3 , Eq. (3.29), e a Transformação de Kircchoff, Eq. (2.26), na Eq. (3.23), assim,

$$C_4 = \frac{q|_{x=x_e}}{k_{2ref}}(x_E - x_e) + \frac{1}{k_{2ref}} \int_{T_{ref}}^{T_E} k_2(T_2) dT_2 \quad (3.30)$$

Sabendo-se que para uma malha uniforme $x_e = (x_E + x_P)/2$, a solução da Eq. (3.21) é

$$\theta_2 = -\frac{q|_{x=x_e}}{k_{2ref}}(x - x_E) + \frac{1}{k_{2ref}} \int_{T_{ref}}^{T_E} k_2(T_2) dT_2 \quad (3.31)$$

Com base na Eq. (3.18), pode-se escrever que $\theta_1 = \theta_2$ na coordenada $x = x_e$. Assim,

$$-\frac{q|_{x=x_e}}{k_{1ref}}(x_e - x_P) + \frac{1}{k_{1ref}} \int_{T_{ref}}^{T_P} k_1(T_1) dT_1 = -\frac{q|_{x=x_e}}{k_{2ref}}(x_e - x_E) + \frac{1}{k_{2ref}} \int_{T_{ref}}^{T_E} k_2(T_2) dT_2 \quad (3.32)$$

Reconhecendo na Eq. (3.32) que $(x_e - x_P) = h/2$ e $(x_e - x_E) = -h/2$, tem-se que

$$-\frac{q|_{x=x_e}}{k_{1ref}} \left(\frac{h}{2} \right) + \frac{1}{k_{1ref}} \int_{T_{ref}}^{T_P} k_1(T_1) dT_1 = \frac{q|_{x=x_e}}{k_{2ref}} \left(\frac{h}{2} \right) + \frac{1}{k_{2ref}} \int_{T_{ref}}^{T_E} k_2(T_2) dT_2 \quad (3.33)$$

Assim, o fluxo de calor $q|_{x=x_e}$ pode ser calculado como

$$q|_{x=x_e} = -\frac{2}{h (k_{1ref} + k_{2ref})} \left[-k_{2ref} \int_{T_{ref}}^{T_P} k_1(T_1) dT_1 + k_{1ref} \int_{T_{ref}}^{T_E} k_2(T_2) dT_2 \right] \quad (3.34)$$

Para o esquema DK1D é necessário uma aproximação para o fluxo de calor. Neste caso, a aproximação utiliza a função de interpolação CDS. Assim, pode-se escrever que:

$$q|_{x=x_e} \approx -k_e \frac{T_E - T_P}{h} \quad (3.35)$$

Empregando a Eq. (3.34) na Eq. (3.35), chega-se ao cálculo da condutividade térmica k_e , fazendo

$$k_e = \frac{2}{(T_E - T_P) (k_{1ref} + k_{2ref})} \left[-k_{2ref} \int_{T_{ref}}^{T_P} k_1(T_1) dT_1 + k_{1ref} \int_{T_{ref}}^{T_E} k_2(T_2) dT_2 \right] \quad (3.36)$$

Na Eq. (3.36), os valores para k_{1ref} , k_{2ref} e T_{ref} devem utilizar como referência a temperatura T_e . O valor para T_e , se necessário, pode ser obtido na Eq. (2.23). As Eqs. (G.25) a (G.29), apresentadas no Apêndice G, representam a integração numérica entre o nó P e o nó E , para cada um dos problemas teste avaliados neste trabalho.

4 DEFINIÇÃO DOS PROBLEMAS DE TESTE E DETALHES DA MODELAGEM COMPUTACIONAL

Neste capítulo são apresentados cinco problemas: quatro envolvendo condução de calor e um envolvendo advecção-difusão em uma parede plana. Todos os problemas apresentam solução analítica conhecida permitindo, assim, a verificação da solução numérica. As definições dos problemas e das condições de contorno são de Marchi (2007). A utilização de problemas semelhantes permitiu reexaminar todos os esquemas de cálculo da condutividade térmica e, assim, compará-los com os esquemas propostos neste trabalho.

A Eq. (2.1) é o modelo matemático geral para os problemas físicos abordados neste trabalho, sendo que os parâmetros F , k e S variam conforme cada problema. O parâmetro F indica a existência do fenômeno de advecção e $F = 0$ significa dizer que o problema é exclusivamente difusivo. A existência de um termo fonte, ou geração de calor, é dada pelo parâmetro S . A Tab. 4.1 apresenta um resumo com as definições para os cinco problemas analisados.

O capítulo é dividido em cinco seções: definição dos problemas unidimensionais utilizados na análise; definição da variável de interesse; a discretização do domínio de cálculo; a discretização generalizada do modelo matemático; e, o algoritmo utilizado para a solução numérica.

4.1 DEFINIÇÃO DOS PROBLEMAS UTILIZADOS NA ANÁLISE

O modelo matemático associado aos problemas unidimensionais testados neste trabalho é apresentado na Eq. (2.1). Para os problemas avaliados, as condições de contorno são definidas por:

$$\begin{cases} T|_{x=0} = T_0 \text{ } ^\circ\text{C} \\ T|_{x=1} = 1 \text{ } ^\circ\text{C} \end{cases} \quad (4.1)$$

A Fig. 4.1 mostra as condições de contorno de Dirichlet para todos os problemas avaliados e a Tab. 4.1 apresenta os valores para a variável T_0 em $x = 0$. Nesta tabela também são apresentados os valores da condutividade térmica k (W/m.°C), do parâmetro F e do termo fonte S para os problemas unidimensionais em regime permanente analisados neste trabalho. Todos os problemas possuem solução analítica conhecida para a variável primária, assim, é possível

conhecer os erros de discretização e calcular a ordem efetiva da aproximação.

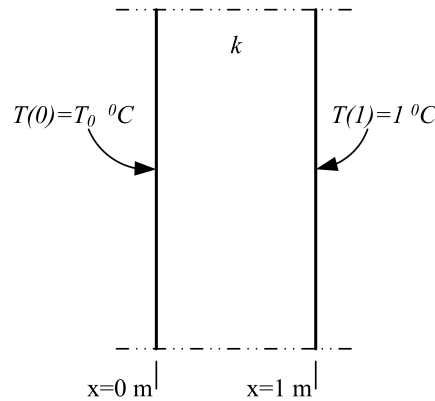


Figura 4.1: Condições de contorno para os cinco problemas

Tabela 4.1: Problemas utilizados nas análises

Problema	Condutividade térmica - k		T_0	F	S
A	$k = \exp(T)$	$0 \leq x \leq 1$	0	0	0
B	$k = T^3$	$0 \leq x \leq 1$	0,2	0	0
C	$k = \begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = 10 \end{cases}$	$0 \leq x < 0,5$ $0,5 \leq x \leq 1$	0	0	0
D	$k = \begin{cases} k_1 = 100 \exp(T) \\ k_2 = \exp(T) \end{cases}$	$0 \leq x < 0,5$ $0,5 \leq x \leq 1$	0	0	0
E	$k = 0,01 + T^2$	$0 \leq x \leq 1$	0	1	S^*

O problema B é baseado no trabalho de Liu e Ma (2005). Conforme pode ser observado na Tab. 4.1, o valor da temperatura em $x = 0$ é $T_0 = 0,2$. Este valor para T_0 , diferentemente dos outros problemas, foi utilizado para que a condutividade térmica tivesse um valor diferente de zero no contorno. A parte do significado físico da condutividade térmica nula, numericamente seria produzida informações completamente erradas sobre as condições de contorno. Para o problema está sendo imposta condições de contorno de Dirichlet na face oeste (imposição para o valor da temperatura), e se a condutividade térmica neste momento for igual a zero, isto é, ($k_w = 0$), isto significa que na fronteira em discussão a condição de contorno é de Neumann (fluxo de calor nulo), e não de Dirichlet, o que é totalmente errado. Em Liu e Ma (2005) se

encontra a discussão sobre esta situação e resultados para um problema com $k_w = 0$ na fronteira $x = 0$.

Para o problema E, o termo fonte S^* é obtido de forma a garantir a solução analítica da equação diferencial ordinária (a definição de S^* é feita na seção 4.1.5).

4.1.1 Solução analítica do Problema A

O Problema A apresenta o caso de condução pura de calor através de uma parede plana, composta por um único material. A condutividade térmica varia exponencialmente com a temperatura, ou seja, a condutividade térmica é dependente da variável principal que é a temperatura. O problema permite a análise unidimensional na direção da espessura da parede.

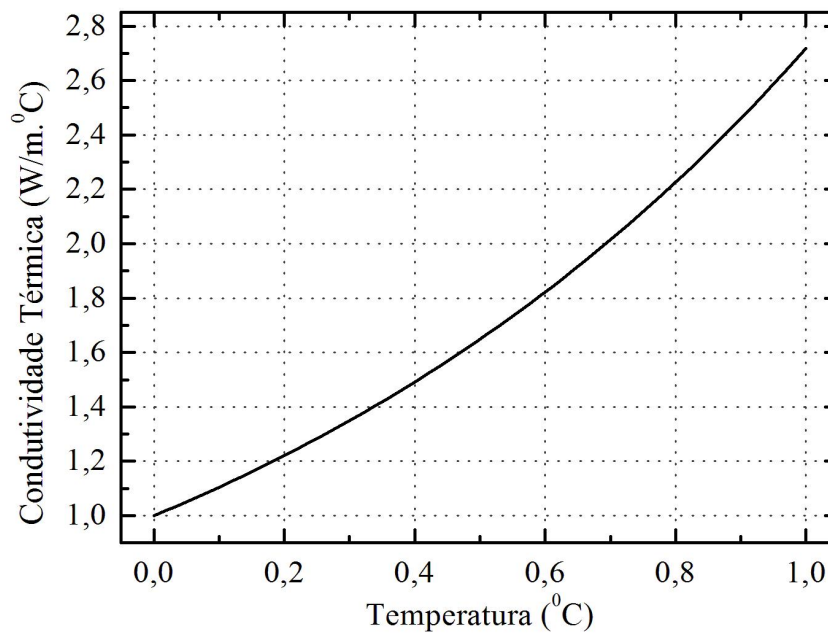


Figura 4.2: Variação da condutividade térmica em função da temperatura para o Problema A

Neste problema, os fluxos são exclusivamente difusivos ($F = 0$) sem geração de calor ($S = 0$). A representação gráfica que relaciona a condutividade térmica com a temperatura é mostrada na Fig. 4.2. Esta função é de classe $\mathcal{C}^\infty(T)$.

A solução analítica da Eq. (2.1) para a variável principal do Problema A, descrito na Tab. 4.1, é dada por:

$$T(x) = \ln[1 + (\exp(1) - 1)x] \quad (4.2)$$

A representação gráfica da solução exata para a temperatura no Problema A é apresentada na Fig. 4.3.

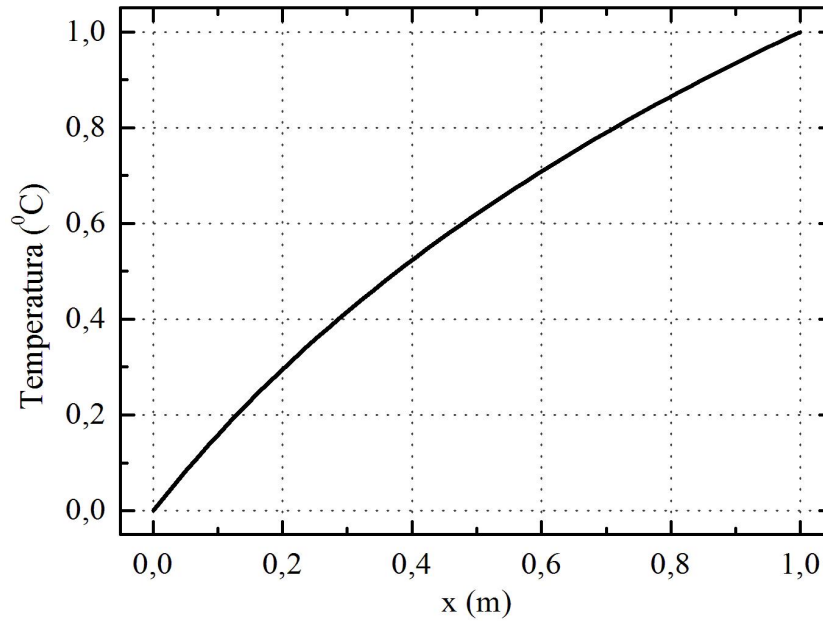


Figura 4.3: Solução exata para o Problema A

4.1.2 Solução analítica do Problema B

No Problema B, os fluxos são exclusivamente difusivos ($F = 0$) sem geração de calor ($S = 0$). Este problema, assim como o Problema A, é composto por um único material, cuja condutividade térmica varia com a temperatura e, conseqüentemente, com a coordenada espacial x .

A Fig. 4.4 apresenta a variação da condutividade térmica em função da temperatura para o Problema B. A função condutividade térmica é de classe $\mathcal{C}^3(T)$. A proposição deste problema se justifica por, além de fazer uma comparação entre os esquemas de aproximação da condutividade térmica na face do VC, permitir comparar a performance desses esquemas com os resultados alcançados no Problema A.

Para o Problema B, a solução analítica da Eq. (2.1) para a variável principal com as condições descritas na Tab. 4.1, é dada por:

$$T(x) = [(T_0)^4 + (1 - (T_0)^4)x]^{1/4} \quad (4.3)$$

A Fig. 4.5 apresenta a representação gráfica da solução exata para a distribuição de tempe-

ratura do Problema B.

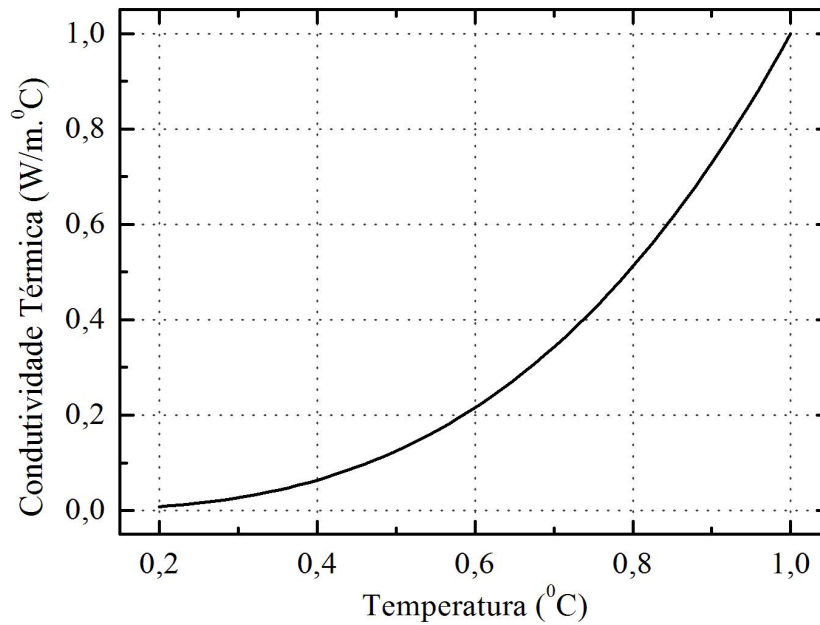


Figura 4.4: Variação da condutividade térmica em função da temperatura para o Problema B

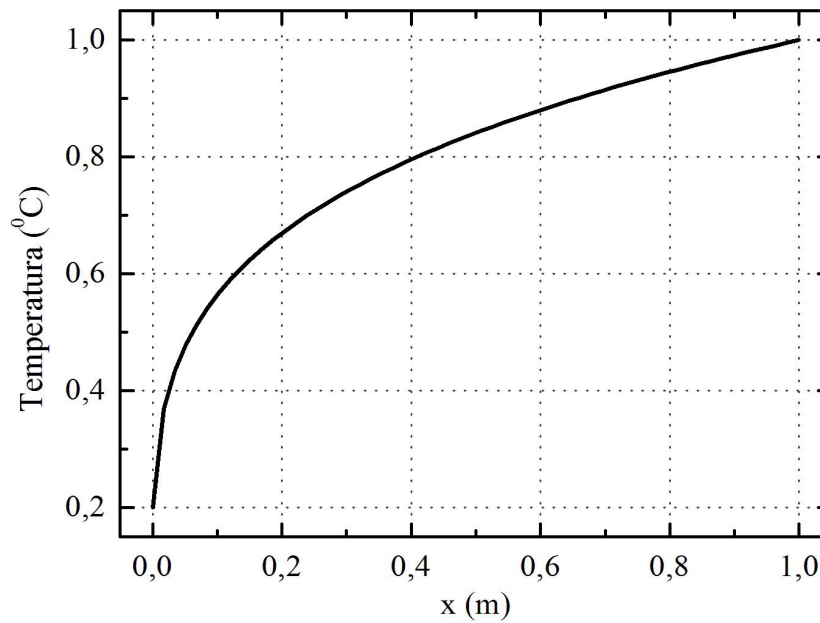


Figura 4.5: Solução exata para o Problema B

Este problema (Problema B) foi baseado no trabalho de Liu e Ma (2005). Liu e Ma (2005) nomeou esse problema em seu trabalho de Problema A. A diferença entre eles é que o comprimento do domínio de cálculo foi alterado de $0 \leq x \leq 2$, na geometria original, para $0 \leq x \leq 1$ na adaptação feita para o Problema B deste trabalho. As demais condições foram mantidas. As-

sim, espera-se comparar os resultados do Problema B apresentados neste trabalho em relação ao Problema A, de Liu e Ma (2005).

4.1.3 Solução analítica do Problema C

O Problema C foi proposto para avaliar os esquemas de cálculo da condutividade térmica na face do VC onde existem dois materiais com condutividades térmicas diferentes, k_1 e k_2 , constantes e, portanto, não dependentes da temperatura. No caso, a posição espacial escolhida para a mudança de condutividade térmica é $x = 0,5$.

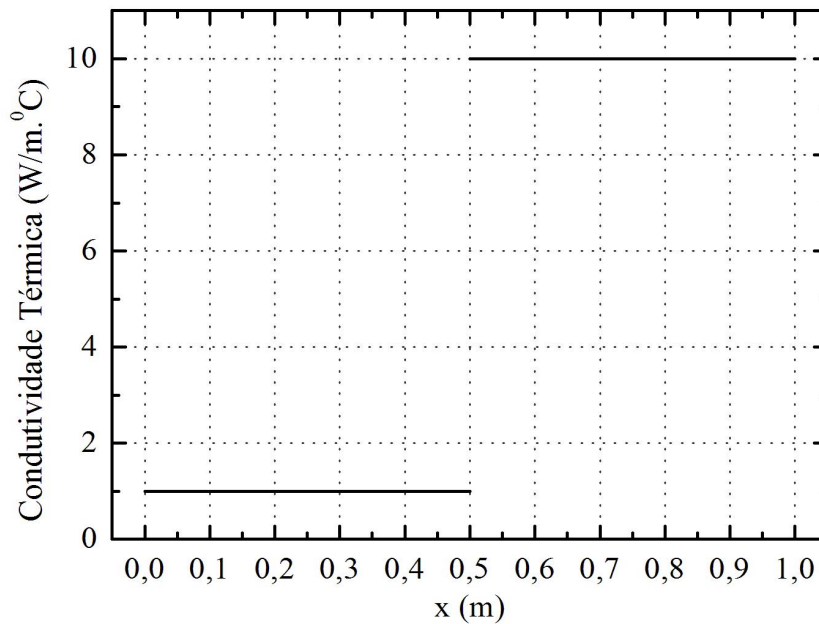


Figura 4.6: Variação da condutividade térmica em função da posição espacial para o Problema C

A Fig. 4.6 apresenta a variação da condutividade térmica em função da posição espacial para o Problema C. Na figura, observa-se que na posição $x = 0,5$ existe um salto no valor da condutividade térmica. Nesta posição, a condutividade térmica varia de $k_1 = 1$ para um valor igual a $k_2 = 10$.

Para o Problema C, a solução analítica da Eq. (2.1) para a temperatura com as condições descritas na Tab. 4.1, é dada por:

$$\begin{aligned}
 T(x) &= \frac{2k_2x}{k_1 + k_2} & 0 \leq x < 0,5 \\
 T(x) &= 1 + \frac{2k_1}{k_1 + k_2}(x - 1) & 0,5 \leq x \leq 1
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

onde k_1 é a condutividade térmica para $0 \leq x < 0,5$ e k_2 é a condutividade térmica para $0,5 \leq x \leq 1$.

O Problema C testado neste trabalho se baseia em um problema semelhante (Problema D) apresentado em Liu e Ma (2005), e permite analisar o erro numérico para a variável principal (temperatura) em uma situação de descontinuidade e mudança abrupta das propriedades de transporte. As diferenças em relação ao problema proposto por Liu e Ma (2005) são a alteração nos valores da temperatura T_0 em $x = 0$ e no comprimento do domínio de cálculo.

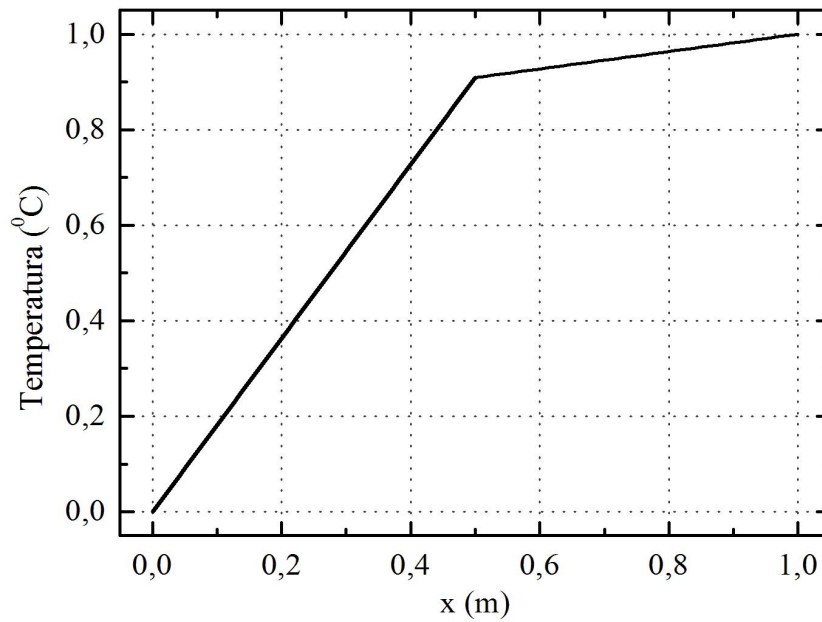


Figura 4.7: Solução exata para o Problema C

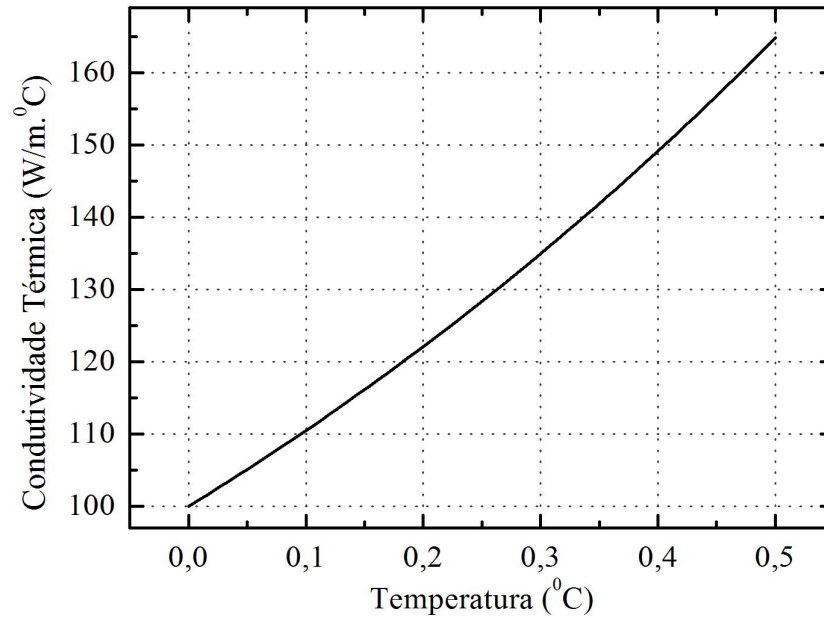
A representação gráfica da solução exata para a temperatura no Problema C é dada pela Fig. 4.7. Observa-se que na posição $x = 0,5$ existe uma mudança no comportamento da distribuição da temperatura em função da mudança no valor da condutividade térmica.

4.1.4 Solução analítica do Problema D

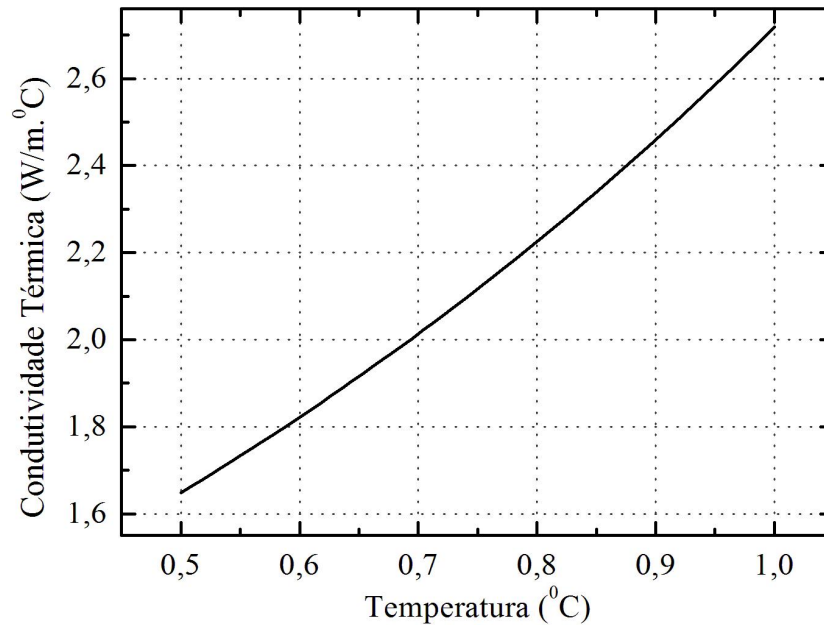
O Problema D apresenta o caso de condução pura de calor através de uma parede plana, onde os fluxos são exclusivamente difusivos ($F = 0$), sem geração de calor ($S = 0$) e existem dois materiais com condutividades térmicas diferentes, k_1 e k_2 . Essas condutividades térmicas variam exponencialmente com a temperatura. O problema permite a análise unidimensional na direção da espessura da parede.

A Fig. 4.8 apresenta a variação da condutividade térmica em função da temperatura para

o Problema D. Na posição $x = 0,5$, cuja temperatura é igual à $0,01686^\circ\text{C}$, existe um salto no valor da condutividade térmica que varia de $k_1 = 100 \exp(T)$ (Fig. 4.8(a)) para um valor igual a $k_2 = \exp(T)$, Fig. 4.8(b).



(a) Variação da condutividade térmica para $0 \leq x < 0,5$



(b) Variação da condutividade térmica para $0,5 \leq x \leq 1$

Figura 4.8: Variação da condutividade térmica em função da temperatura para o Problema D

Para o Problema D, a solução analítica da Eq. (2.1) para a variável principal com as condições descritas na Tab. 4.1, é dada por:

$$T(x) = \ln \left[1 + \frac{\lambda}{100} x \right] \quad 0 \leq x < 0,5 \quad (4.5)$$

$$T(x) = \ln [\exp(1) + \lambda (x - 1)] \quad 0,5 \leq x \leq 1 \quad (4.6)$$

$$\lambda = 200 \left\{ \exp \left[\ln \left(\frac{100 + \exp(1)}{101} \right) \right] - 1 \right\} \quad (4.7)$$

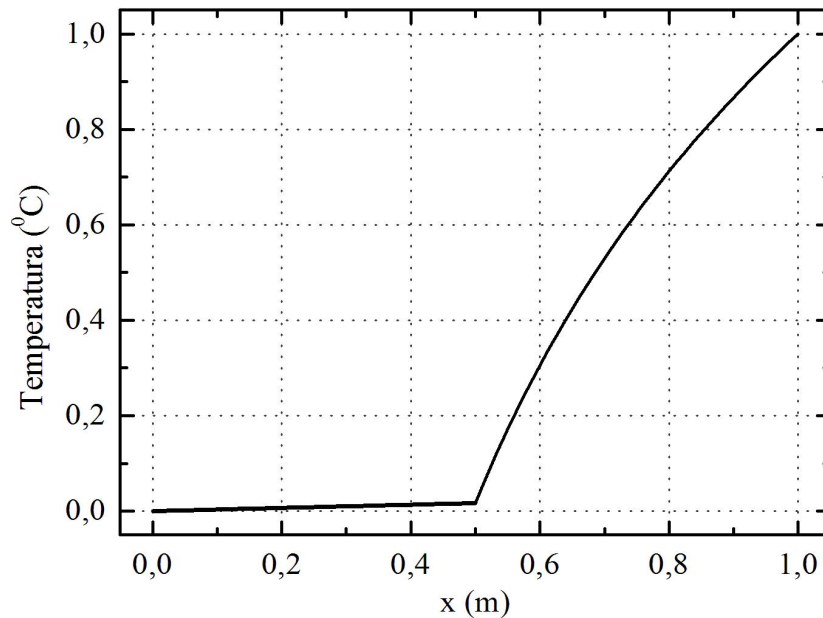


Figura 4.9: Solução exata para o Problema D

A representação gráfica da solução exata para a temperatura no Problema D é dada pela Fig. 4.9. Observa-se que na posição $x = 0,5$ existe uma mudança no comportamento da distribuição da temperatura em função da mudança no valor da condutividade térmica.

4.1.5 Solução analítica do Problema E

Importantes problemas de engenharia envolvem a transferência de energia, nos quais o fenômeno da transferência de calor pela simples diferença de temperatura entre as partes de um meio contínuo - a difusão - associa-se ao fenômeno da advecção, onde uma quantidade

de energia térmica é transferida pelo movimento deste meio, que pode ser o escoamento de um fluido ou o transporte de particulados. Esta correlação entre estes dois modos distintos e interligados de transferência de calor é denominada de convecção (OOSTHUIZEN; NAYLOR, 1999).

O Problema E apresenta um único material com condutividade térmica variável em função da temperatura. Este problema foi proposto para avaliar o desempenho dos diversos esquemas de cálculo da condutividade térmica na presença de um termo advectivo ($F = 1$).

A Fig. 4.10 apresenta a variação da condutividade térmica em função da temperatura para o Problema E. A função condutividade térmica é de classe $\mathcal{C}^2(T)$.

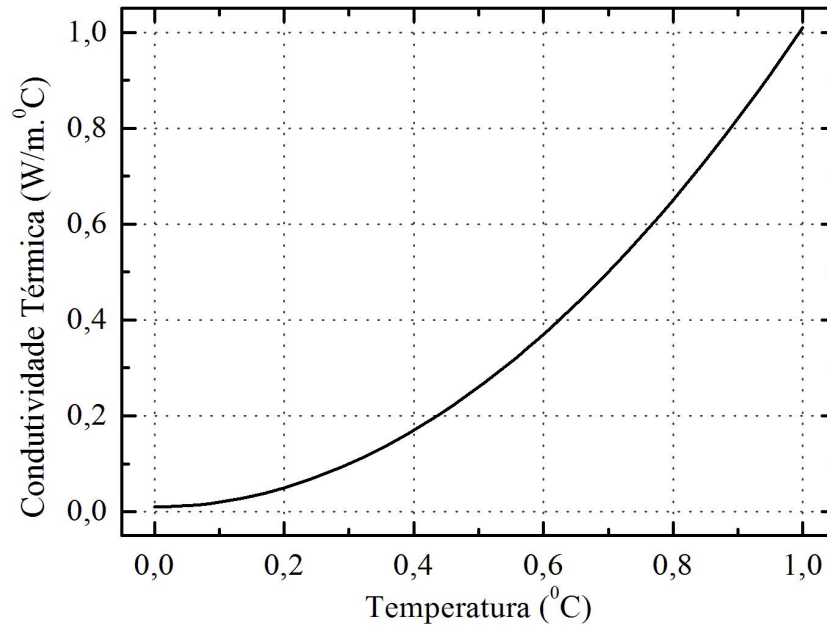


Figura 4.10: Variação da condutividade térmica em função da temperatura para o Problema E

O problema modelo proposto para a advecção-difusão apresenta no modelo matemático, condições de contorno e termos fonte que se ajustam de forma a possibilitar a obtenção da solução analítica pelo método conhecido como método das soluções fabricadas (ROY *et al.*, 2004; KHODIER, 2001).

Para o Problema E, o termo fonte S^* é dado por

$$S^* = \frac{\exp(10x) [-300 \exp(20x) + 400 \exp(10x) + 9 \exp(20) - 18 \exp(10) - 91]}{[\exp(10) - 1]^3} \quad (4.8)$$

Com base no termo fonte (S^*), a solução analítica da Eq. (2.1) para a variável principal do

Problema E, descrito na Tab. 4.1, é dada por:

$$T(x) = \frac{\exp(10x) - 1}{\exp(10) - 1} \quad (4.9)$$

A representação gráfica da solução exata para a temperatura no Problema E é dada pela Fig. 4.11.

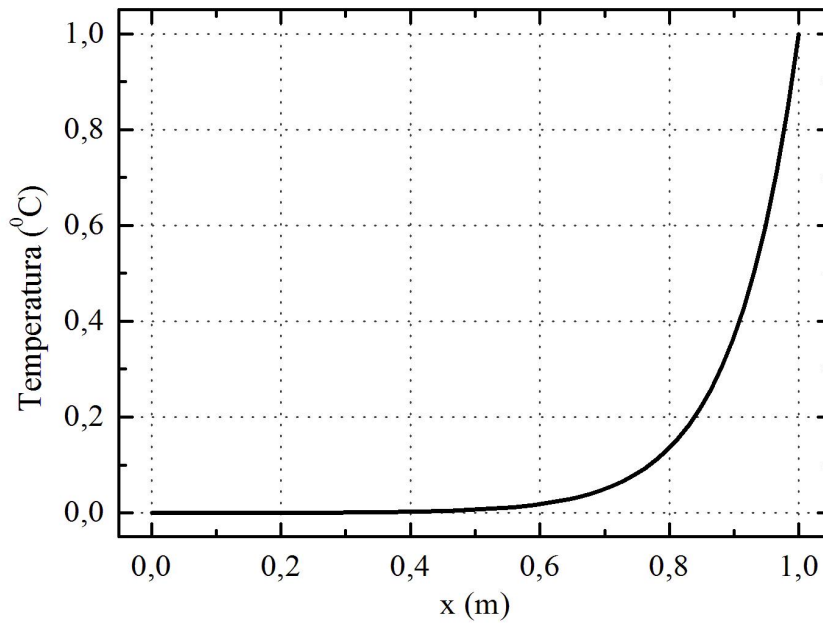


Figura 4.11: Solução exata para o Problema E

4.2 DEFINIÇÃO DA VARIÁVEL DE INTERESSE

A variável de interesse definida para o cálculo do erro numérico leva em consideração todos os nós da malha. Assim, será utilizada como medida para o erro numérico a média da norma l_1 do erro de discretização. A norma de um conjunto de valores para o erro numérico representa o valor que ocorre com maior frequência neste conjunto, ou seja, o valor mais comum para o erro. A média da norma l_1 do erro de discretização é dada pelo somatório dos módulos dos erros numéricos da temperatura em todos os nós, dividido pelo número de volumes, que é definida matematicamente por

$$L = \frac{\sum_{p=1}^N |E|}{N} \quad (4.10)$$

onde L é a média da norma l_1 do erro de discretização, N é o número total de volumes reais na

malha e $|E|$ é o módulo do erro numérico. O módulo do erro numérico é dado por

$$|E| = |T^{ex}(P) - T(P)| \quad (4.11)$$

onde $T^{ex}(P)$ é a solução analítica da temperatura calculada em cada volume e $T(P)$ é a sua solução numérica.

4.3 DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO DE CÁLCULO

Tabela 4.2: Número de volumes de controle e tamanhos de malhas

N	h	N	h
2	0,50000000000000000000	2.048	0,00048828125000000000
4	0,25000000000000000000	4.096	0,00024414062500000000
8	0,12500000000000000000	8.192	0,00012207031250000000
16	0,06250000000000000000	16.384	0,00006103515625000000
32	0,03125000000000000000	32.768	0,00003051757812500000
64	0,01562500000000000000	65.536	0,00001525878906250000
128	0,00781250000000000000	131.072	0,00000762939453125000
256	0,00390625000000000000	262.144	0,00000381469726562500
512	0,00195312500000000000	524.288	0,00000190734863281250
1.024	0,00097656250000000000	1.048.576	0,000000953674316406250

Para resolução dos cinco problemas é utilizada a malha uniforme de nós centrados. Uma malha uniforme é aquela que possui o mesmo tamanho de elementos, ou volumes de controle. O tamanho (h) foi obtido através da divisão do comprimento do domínio de cálculo (H) pelo número de volumes de controle (N), sendo

$$h = \frac{H}{N} \quad (4.12)$$

As soluções numéricas foram calculadas para diferentes números de volumes de controle (N), como mostra a Tab. 4.2, totalizando vinte malhas diferentes.

4.4 DISCRETIZAÇÃO GENERALIZADA DO MODELO MATEMÁTICO

A seguir são apresentados os coeficientes do sistema de equações, Eq. (2.10), resultante da discretização do modelo matemático para os problemas analisados neste trabalho. Esta apresentação é feita de forma generalizada, ou seja, é aplicável para todos os problemas que constam na Tab. 4.1.

4.4.1 Coeficientes dos volumes internos

Seguindo a numeração dos nós da malha apresentada na Fig. 2.2 e a relação entre as Eqs. (2.9) e (2.10), os coeficientes dos volumes internos, $P = 1$ até $P = N$, são dados por:

$$a_w = \frac{k_w}{h} + \frac{F}{2} \quad (4.13)$$

$$a_e = \frac{k_e}{h} - \frac{F}{2} \quad (4.14)$$

$$a_P = a_w + a_e \quad (4.15)$$

$$b_P = \int_{x_w}^{x_e} S dx \quad (4.16)$$

Os termos da Eq. (2.10), apresentados pelas Eqs. (4.13) a (4.15), são obtidos quando se utiliza a função de interpolação do tipo CDS (PATANKAR, 1980; MALISKA, 2004). Para o Problema E, único com termo fonte, o termo independente b_P é avaliado analiticamente. Geralmente, nas soluções via MVF, utiliza-se algum método de integração numérica para esse termo. Neste trabalho, a integração analítica foi utilizada para minimizar possíveis erros numéricos decorrentes da integração numérica que poderiam interferir na avaliação dos erros de discretização dos esquemas para cálculo de k .

4.4.2 Aplicação das condições de contorno

Para o contorno esquerdo, a equação algébrica será escrita com base em um volume fictício. A Fig. 4.12 apresenta o contorno esquerdo e os nós adjacentes a este contorno, sendo o nó $P = 0$ do volume fictício e o nó $P = 1$ do volume real.

Sendo a temperatura do nó $P = 0$ igual a $T_{P=0}$ e a temperatura do nó $P = 1$ igual a $T_{P=1}$, a imposição da condição de contorno em $x = 0$, $T(x = 0) = T_0$, é dada por:

$$T_0 = \frac{T_{P=0} + T_{P=1}}{2} \quad (4.17)$$

logo,

$$T_{P=0} = -T_{P=1} + 2T_0 \quad (4.18)$$

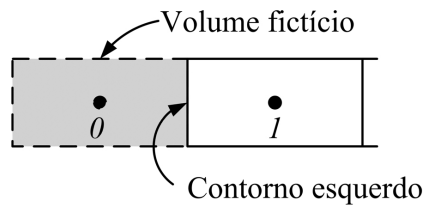


Figura 4.12: Volume fictício $P = 0$ adjacente ao contorno esquerdo

A Eq. (4.18) é a equação algébrica para o volume fictício $P = 0$. Comparando a Eq. (4.18) com a Eq. (2.10), conclui-se que

$$a_w = 0 \quad (4.19)$$

$$a_e = -1 \quad (4.20)$$

$$a_P = 1 \quad (4.21)$$

$$b_P = 2 T_0 \quad (4.22)$$

e o valor da temperatura T_0 no contorno esquerdo é obtido na Tab. 4.1.

Uma análise semelhante pode ser feita para o contorno direito. A Fig. 4.13 apresenta o contorno direito associado ao volume fictício $P = N + 1$.

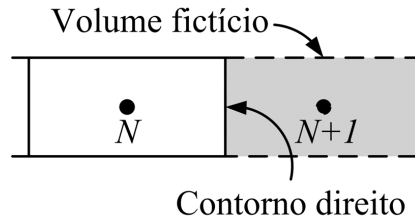


Figura 4.13: Volume fictício $P = N + 1$ adjacente ao contorno direito

Os problemas propostos na Tab. 4.1, em $x = 1$, têm a temperatura $T(x = 1) = 1$. Assim, pode-se escrever

$$1 = \frac{T_{P=N} + T_{P=N+1}}{2} \quad (4.23)$$

logo,

$$T_{P=N+1} = -T_{P=N} + 2 \quad (4.24)$$

Comparando-se a Eq. (2.10) com a Eq. (4.24), e observando que para $P = N + 1$, o nó $P = N$ é o nó oeste, tem-se que

$$a_w = -1 \quad (4.25)$$

$$a_e = 0 \quad (4.26)$$

$$a_P = 1 \quad (4.27)$$

$$b_P = 2 \quad (4.28)$$

A Tab. 4.3 apresenta os valores para os coeficientes dos volumes fictícios $P = 0$ e $P = N + 1$.

Tabela 4.3: Coeficientes dos volumes fictícios para imposição das condições de contorno

coeficiente	contorno esquerdo ($P = 0$)	contorno direito ($P = N + 1$)
a_P	1	1
a_W	0	-1
a_e	-1	0
b_P	$2T_0$	2

4.5 ALGORITMO DA SOLUÇÃO

O algoritmo apresentado nesta seção é utilizado para a solução dos problemas listados na Tab. 4.1. Como o problema que está sendo resolvido é não-linear, o algoritmo prevê um número de iterações máximas ou uma tolerância para a diferença entre os valores de duas iterações consecutivas para o processo de parada.

Baseado neste algoritmo, um programa computacional foi implementado na linguagem FORTRAN/95 (ADAMS *et al.*, 1997), com o software Compaq Fortran 6.6, tipo de projeto Console Application .

O algoritmo é apresentado em linguagem natural, ou seja, as instruções são descritas como uma lista de tarefas a serem realizadas. O programa deve ser capaz de:

1. Ler os dados do problema de um arquivo de dados, que deverá ter a seguinte estrutura:
 - tipo de problema, ver Tab. 4.1
 - tipo de esquema para o cálculo de k
 - número de VC, (N)
 - número máximo de iterações
 - tolerância para a solução
2. Discretizar o domínio de cálculo, isto é, obter h fazendo $h = H/N$, e determinar as coordenadas nodais de cada um dos volumes de controle.
3. Calcular a solução analítica para a temperatura.
4. Inicialização da condição inicial: temperatura no domínio para o nó P , fazendo P variar de 1 até N , dada por $T(P) = \left[\frac{(1 - T_0)}{N} \right] P$.

5. Informar os valores dos coeficientes nos volumes fictícios ($P = 0$ e $P = N + 1$), conforme Tab. 4.3.
6. Calcular o termo fonte b_P para os volumes reais ($P = 1$ a $P = N$), Eq. (4.16).
7. Calcular a condutividade térmica k_P para os volumes reais ($P = 1$ a $P = N$), com base na definição da condutividade térmica para cada problema apresentado na Tab. 4.1.
8. Informar os valores da condutividade térmica nas faces $k_e(P = 0)$ e $k_e(P = N)$, com base nas condições de contorno.
9. Calcular a condutividade térmica nas faces $k_e(P)$ de acordo com o esquema selecionado para os volumes $P = 1$ a $P = N - 1$.
10. Calcular os coeficientes nos volumes reais ($P = 1$ a $P = N$), apresentados pelas Eqs. (4.13) a (4.15).
11. Resolver o sistema de equações através do método TDMA, ver seção 2.4.
12. Calcular a variável baseada na média da norma l_1 do erro de discretização (L), conforme Eq. (4.10).
13. Retornar à etapa 7 até atingir o número máximo de iterações fixado.
14. Visualizar os resultados.

4.6 RESUMO DO CAPÍTULO 4

Neste capítulo são apresentados os cinco problemas físicos escolhidos e as respectivas soluções analíticas para o campo de temperaturas. Em seguida, foi definida a variável de interesse para o cálculo do erro numérico como sendo a média da norma l_1 do erro de discretização. A discretização do domínio de cálculo foi apresentada na Seção 4.3, na qual se observa o tamanho da malha (h) em função do número de volumes.

Neste capítulo, também, foi feita a discretização generalizada do modelo matemático, na qual foram detalhados os coeficientes para os volumes internos e os volumes das fronteiras (submetidos às condições de contorno). Esta discretização generalizada foi desenvolvida de modo a representar todos os problemas deste trabalho e facilitar a implementação do algoritmo de solução.

5 RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados os resultados para os problemas da Tab. 4.1, nos quais constam as análises dos erros de discretização e da ordem efetiva da aproximação para cada um dos esquemas de cálculo de k na face do VC.

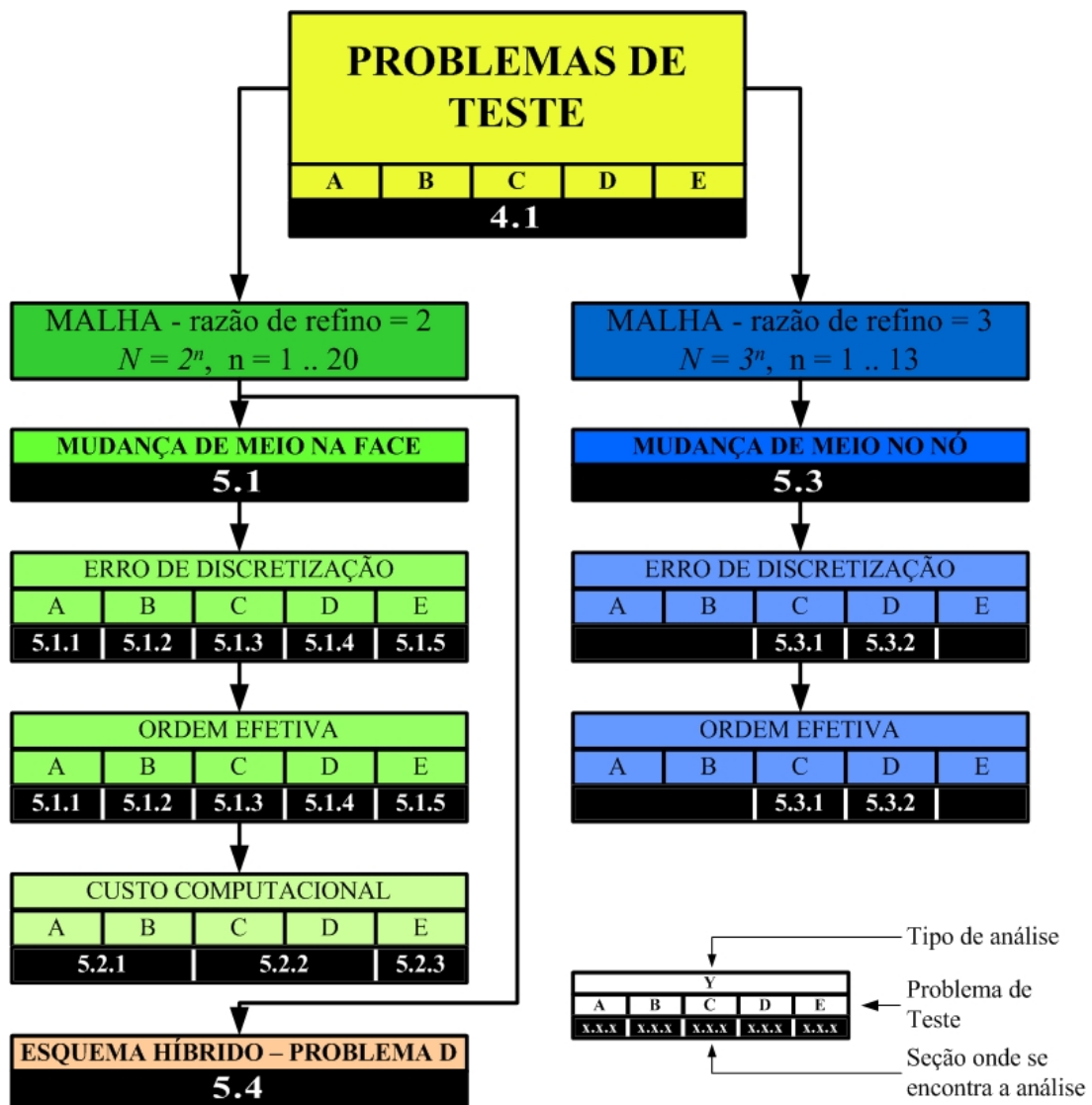


Figura 5.1: Mapa de leitura das análises

Outras análises realizadas para os mesmos problemas da Tab. 4.1 levam em consideração o custo computacional. Neste aspecto, avalia-se o tempo gasto e a memória computacional necessária para a obtenção da solução em cada um dos esquemas de cálculo de k . A Fig. 5.1, apresenta a sequência de análises realizadas para os problemas de teste.

A influência da geração da malha sobre os resultados alcançados pelos esquemas de cálculo

de k é discutida em problemas com mudança brusca na condutividade térmica (dois meios diferentes). Para esta avaliação são utilizados os Problemas C e D.

Neste capítulo, ainda para o Problema D, é feita a apresentação e discussão sobre os resultados de um esquema Híbrido que combina os esquemas MAk e MHk para o cálculo da condutividade térmica.

Os algoritmos neste trabalho foram implementados na linguagem FORTRAN/95 com o uso do Compaq Visual FORTRAN 6.6, projeto tipo Console e em versão release. Os testes foram realizados em um microcomputador com Processador Intel Core 2 Duo com 2,66 GHz e 1 GB RAM usando aritmética de quádrupla precisão.

5.1 MUDANÇA DE MEIO EM UMA FACE

5.1.1 Resultados para o Problema A

A análise do erro de discretização foi feita para o Problema A levando em consideração onze esquemas de cálculo de k na face do VC.

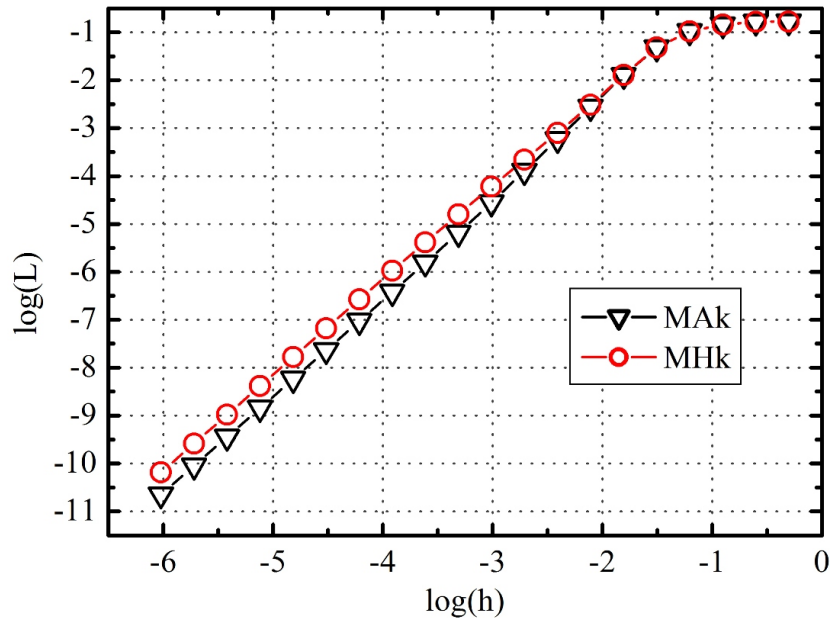


Figura 5.2: Média da norma l_1 dos erros verdadeiros (E) para o Problema A

A Fig. 5.2 apresenta a média da norma l_1 dos erros de discretização em função de h para uma razão de refino de malha igual a dois. Nesta figura estão representados somente o esquema com maior erro de discretização, MHk, e o esquema com menor erro, MAk.

A Tab. 5.1 apresenta os valores da média da norma l_1 do erro de discretização para o

esquema com menor erro de discretização que é o MAk. Nessa tabela, também, podem ser observados os resultados comparativos entre os demais esquemas e o MAk em função do número de volumes (N) utilizados nas análises.

A comparação entre os esquemas é estabelecida com base naquele que apresenta o melhor resultado, ou seja, o que possui menor erro de discretização. Assim, a comparação entre os esquemas é feita pelo parâmetro R , sendo este parâmetro definido por:

$$R = \frac{L_n}{L_1} \quad (5.1)$$

onde L_1 é o valor do erro de discretização para o melhor esquema e L_n é valor do erro de discretização do esquema que está sendo comparado.

Observa-se na Tab. 5.1 que, para os esquemas que utilizam a transformação de Kirchhoff com integração numérica como fundamentação teórica, os esquemas KG6P, KG4P, KG3P e KG2P apresentam resultados iguais e o Lk2M tem seus resultados muito próximos desses esquemas. Tal situação é explicada pela acuracidade do processo de integração numérica. Mesmo utilizando a integração gaussiana, com dois ou três pontos, não se consegue obter a integração exata para a função condutividade térmica que é de classe $\mathcal{C}^\infty(T)$. Cabe ressaltar que a diferença média entre o melhor (KG6P) e pior (Lk2M) desses esquemas que utilizam integração numérica é de aproximadamente 1,16%.

Ainda na Tab. 5.1, para o intervalo convergente definido entre as malhas com 64 até 1.048.576 volumes, pode-se calcular a diferença média do erro de discretização entre o melhor e o pior esquema como sendo de aproximadamente 30,77% e a diferença máxima de 31,09% para as malhas com mais de 32.768 volumes. Os outros esquemas avaliados têm seus resultados com valores intermediários entre o MAk e o MHk.

A Fig. 5.3 mostra apenas quatro dos esquemas avaliados como representação gráfica do comportamento da ordem efetiva, dentre eles, os esquemas de melhor (MAk) e pior (MHk) desempenhos e, além destes, os esquemas LTMH e Lk2M. Na Tab. 5.2 são apresentados os resultados da ordem efetiva para cada uma das malhas e esquemas avaliados. Observa-se, então, que a ordem efetiva para todos os esquemas converge para dois quando $h \rightarrow 0$. Esse resultado mostra que nenhum dos esquemas de cálculo de k na face do VC deteriora a ordem da aproximação do esquema CDS.

A Tab. A.1 apresentada no Apêndice A contém os valores de L , Eq. (4.10), para todos os esquemas avaliados.

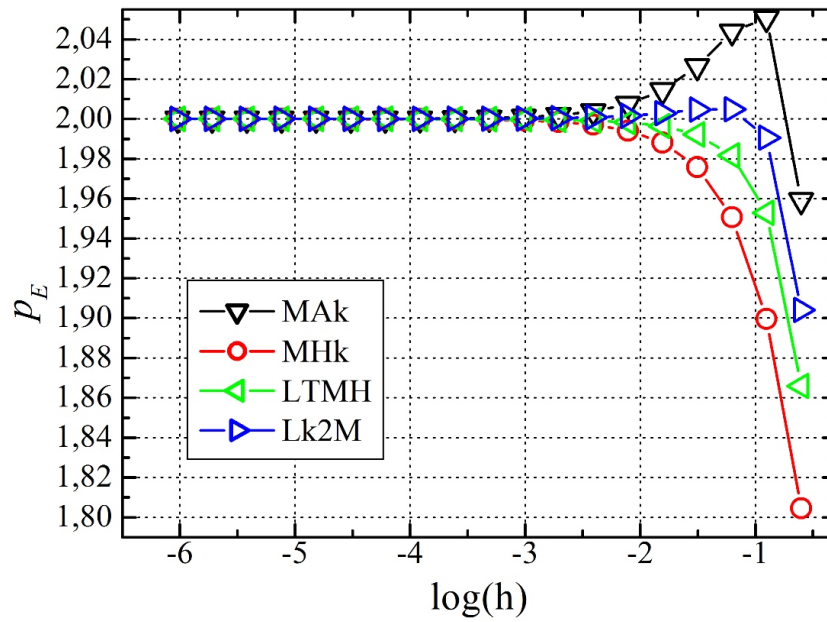


Figura 5.3: Ordem efetiva do erro de discretização para o Problema A

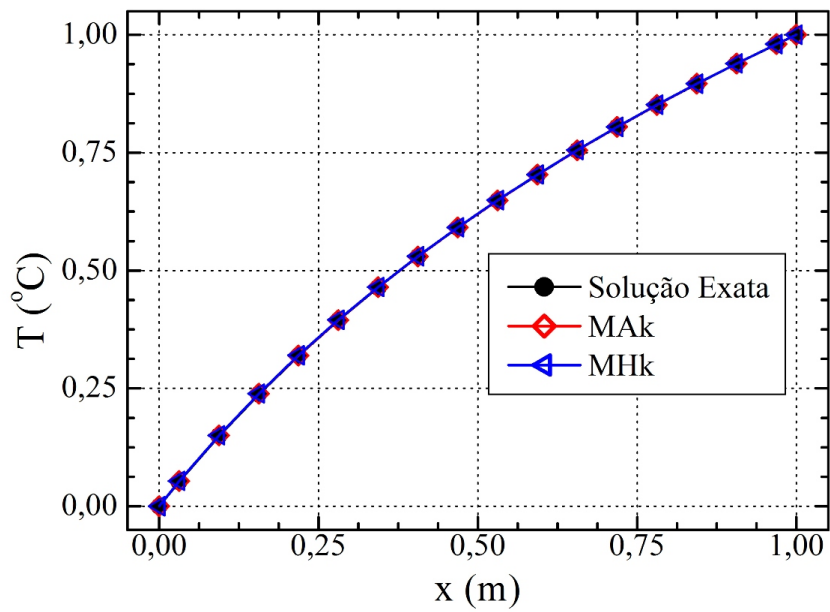
A Tab. 5.3 apresenta a lista com a ordenação do melhor para o pior resultado alcançado pelos esquemas de cálculo de k na face do VC em relação ao erro de discretização. Esta análise considera os resultados para todas as malhas a partir da qual é definido o intervalo convergente.

Tabela 5.3: Ordenação por resultados do erro de discretização para o Problema A

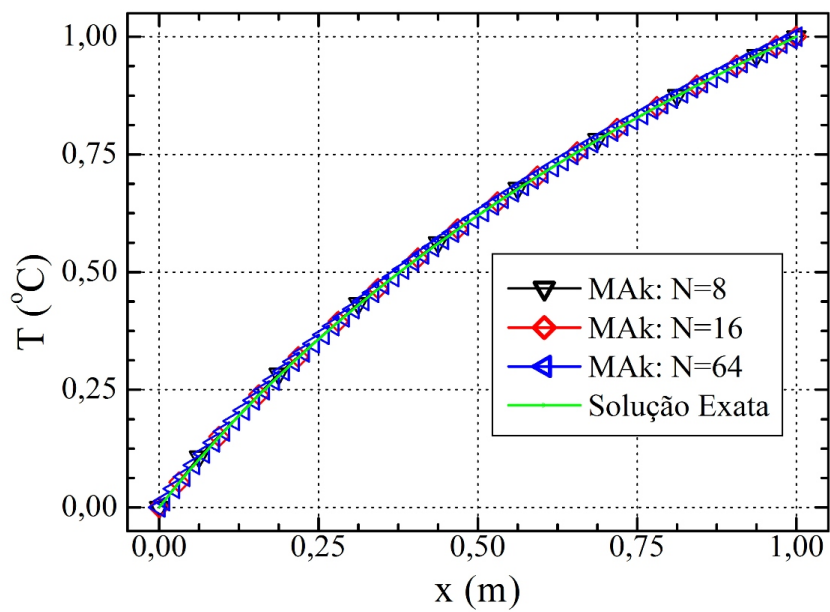
ordem de resultados	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
esquemas	MAk	TkMH	DK1D	KG6P	KG3P	KG4P	KG2P	Lk2M	MAT	LTMH	MHk

A Fig. 5.4 apresenta o campo de temperaturas para o Problema A. Na Fig. 5.4(a) é apresentada uma comparação entre os esquemas MAk, MHk e a solução exata para a malha $N = 16$. Observa-se da Fig. 5.2 que o valor de L na malha $N = 16$ para os esquemas MAk e MHk são praticamente iguais e, portanto, este resultado é evidenciado no campo de temperaturas.

Na Fig. 5.4(b) o campo de temperaturas é plotado para o esquema MAk. Esta figura apresenta os resultados para a malha com $N = 8$, $N = 16$ e $N = 64$. Como o erro de discretização é muito baixo, mesmo para a malha com $N = 8$, não é possível identificar diferenças significativas para o campo de temperaturas.



(a) Comparação entre os campos de temperatura para os esquemas MAK e MHK



(b) Comparação entre os campos de temperatura para o esquema MAK em diferentes malhas

Figura 5.4: Campo de temperaturas para o Problema A

5.1.2 Resultados para o Problema B

Para o Problema B, o esquema de cálculo de k que apresentou maior erro de discretização é o MHK e o esquema que apresentou menor erro foi o MAK. A Fig. 5.5 apresenta as curvas do

$\log(L)$ versus $\log(h)$ para esses dois esquemas, sendo que a razão de refino de malha é igual a dois.

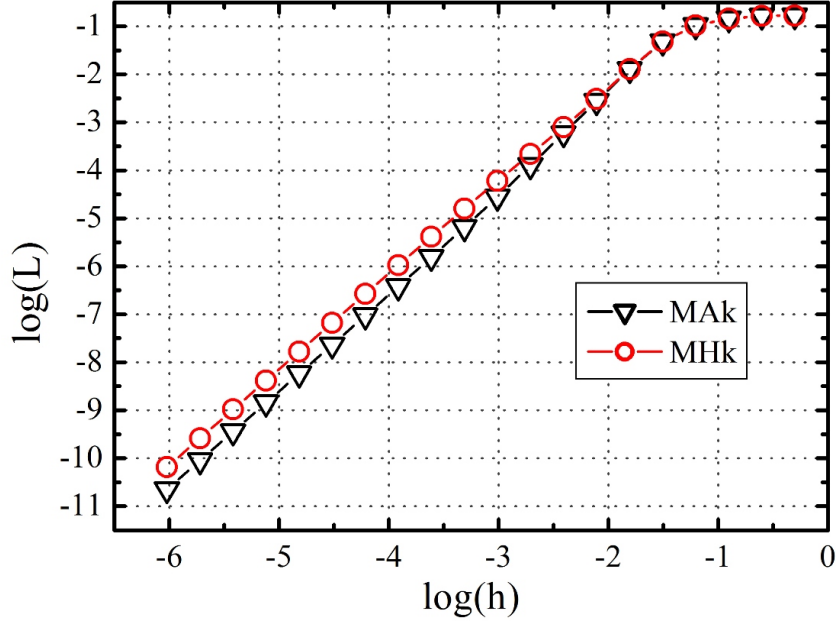


Figura 5.5: Média da norma l_1 dos erros verdadeiros (E) para o Problema B

A Tab. 5.4 apresenta os valores da média da norma l_1 do erro de discretização para o esquema com menor erro de discretização que é o MAK. Nessa tabela, também, é feita a comparação com base no parâmetro R , Eq. (5.1), entre todos os esquemas de cálculo da condutividade térmica em relação ao MAK.

A diferença média entre os resultados do melhor e pior esquema para o cálculo de k é de aproximadamente 136%, sendo a diferença máxima de 189,7% obtida para a malha com $N = 1.048.576$. A diferença média é calculada para o intervalo convergente definido entre as malhas com $N = 64$ até $N = 1.048.576$.

A Tab. B.1 apresentada no Apêndice B contém os valores de L , Eq. (4.10), para todos os esquemas avaliados.

Dos esquemas que utilizam integração numérica, os que se baseiam na quadratura gaussiana apresentam os mesmos resultados, sejam com dois ou três pontos na quadratura. Isto se explica pela análise do número de pontos necessários para que a integração seja exata. Assim,

$$p = \frac{n+1}{2} \quad (5.2)$$

onde p é o número de pontos na integração gaussiana para que o resultado seja exato e n é a

ordem da classe de continuidade da função que se quer integrar¹.

Tabela 5.4: Comparação entre os esquemas de cálculo da condutividade térmica para o Problema B

malha	referência (L_1)	----- R -----									
N	MAk	MHk	MAT	LTMH	TkMH	KG2P	KG3P	Lk2M	KG4P	KG6P	DK1D
2	1,6792 10^{-01}	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4	1,6568 10^{-01}	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
8	1,4595 10^{-01}	0,9999	1,0000	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
16	1,0446 10^{-01}	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
32	4,7977 10^{-02}	1,0005	1,0002	1,0002	1,0000	1,0001	1,0001	1,0001	1,0001	1,0001	1,0001
64	1,2783 10^{-02}	1,0159	1,0052	1,0079	1,0000	1,0035	1,0035	1,0039	1,0035	1,0035	1,0035
128	2,7666 10^{-03}	1,1079	1,0349	1,0528	1,0002	1,0232	1,0232	1,0263	1,0232	1,0232	1,0232
256	5,8784 10^{-04}	1,3562	1,1146	1,1736	1,0008	1,0759	1,0759	1,0864	1,0759	1,0759	1,0759
512	1,2669 10^{-04}	1,7402	1,2409	1,3637	1,0012	1,1598	1,1598	1,1812	1,1598	1,1598	1,1598
1.024	2,8154 10^{-05}	2,1406	1,3761	1,5658	1,0008	1,2502	1,2502	1,2824	1,2502	1,2502	1,2502
2.048	6,5042 10^{-06}	2,4542	1,4829	1,7252	1,0004	1,3217	1,3217	1,3624	1,3217	1,3217	1,3217
4.096	1,5526 10^{-06}	2,6562	1,5515	1,8274	1,0001	1,3676	1,3676	1,4137	1,3676	1,3676	1,3676
8.192	3,7854 10^{-07}	2,7716	1,5904	1,8856	1,0000	1,3936	1,3936	1,4428	1,3936	1,3936	1,3936
16.384	9,3411 10^{-08}	2,8334	1,6111	1,9167	1,0000	1,4074	1,4074	1,4583	1,4074	1,4074	1,4074
32.768	2,3198 10^{-08}	2,8654	1,6218	1,9327	1,0000	1,4145	1,4145	1,4663	1,4145	1,4145	1,4145
65.536	5,7802 10^{-09}	2,8817	1,6272	1,9408	1,0000	1,4182	1,4182	1,4704	1,4182	1,4182	1,4182
131.072	1,4426 10^{-09}	2,8899	1,6300	1,9450	1,0000	1,4200	1,4200	1,4725	1,4200	1,4200	1,4200
262.144	3,6035 10^{-10}	2,8940	1,6313	1,9470	1,0000	1,4209	1,4209	1,4735	1,4209	1,4209	1,4209
524.288	9,0049 10^{-11}	2,8961	1,6320	1,9481	1,0000	1,4214	1,4214	1,4740	1,4214	1,4214	1,4214
1.048.576	2,2508 10^{-11}	2,8971	1,6324	1,9486	1,0000	1,4216	1,4216	1,4743	1,4216	1,4216	1,4216

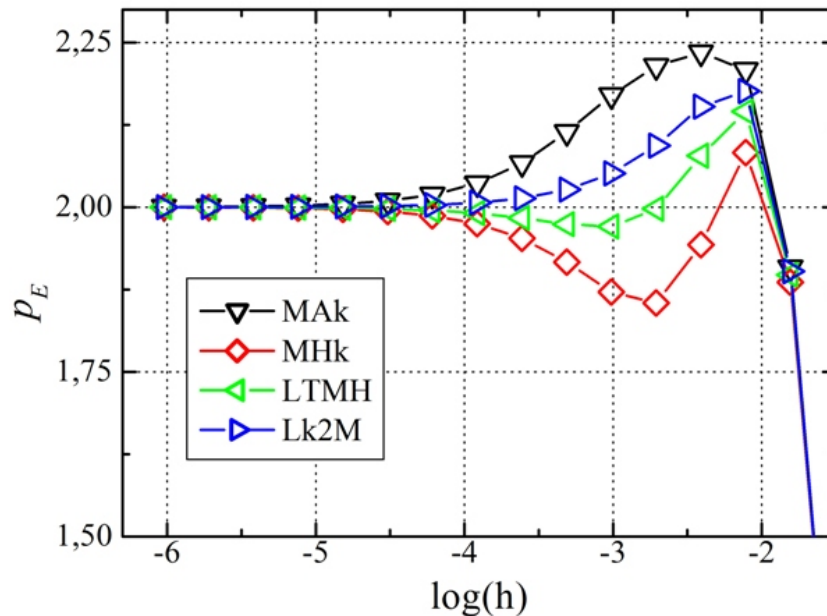


Figura 5.6: Ordem efetiva do erro de discretização para o Problema B

No caso, a função condutividade térmica do Problema B tem ordem de continuidade três,

¹Nota: quando n é par, deve-se substituir o seu valor pelo número ímpar imediatamente superior.

portanto, são necessários no mínimo dois pontos na quadratura. Como os esquemas KG2P, KG3P, KG4P e KG6P possuem dois ou mais pontos na quadratura, a integração numérica é exata e, portanto, os resultados do erro de discretização para estes esquemas são iguais.

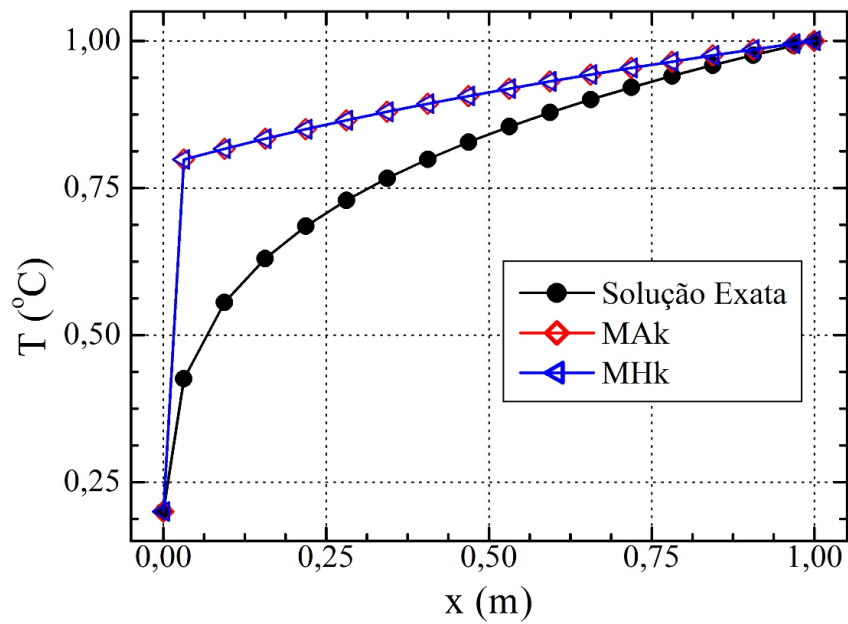
A Fig. 5.6 apresenta a ordem efetiva da aproximação para apenas quatro dos esquemas avaliados, sendo dois deles os esquemas com melhor e pior desempenhos. A Tab. 5.5 mostra as ordens efetivas da aproximação para todos os esquemas avaliados. Assim como no Problema A, os resultados da ordem efetiva não são deteriorados. Pode-se observar que a ordem efetiva tende para dois quando $h \rightarrow 0$, como é de se esperar quando se utiliza aproximação com o esquema CDS para a discretização.

Tabela 5.5: Ordem efetiva do erro de discretização para o Problema B

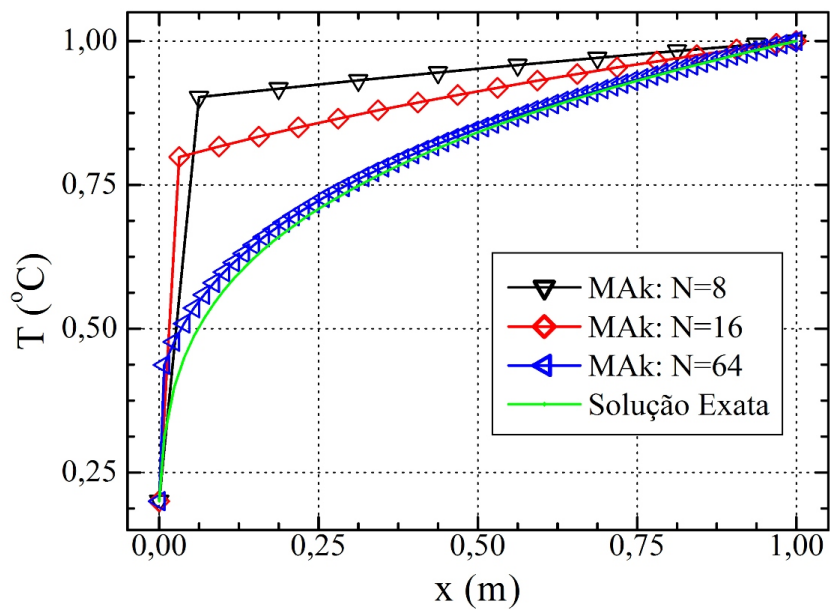
malha	Ordem efetiva											
	N	MAk	MHk	MAT	LTMH	TkMH	KG2P	KG3P	Lk2M	KG4P	KG6P	DK1D
	4	0,019	0,019	0,019	0,019	0,019	0,019	0,019	0,019	0,019	0,019	0,019
	8	0,183	0,183	0,183	0,183	0,183	0,183	0,183	0,183	0,183	0,183	0,183
	16	0,482	0,483	0,483	0,483	0,482	0,483	0,483	0,483	0,483	0,483	0,483
	32	1,123	1,122	1,122	1,122	1,123	1,122	1,122	1,122	1,122	1,122	1,122
	64	1,908	1,886	1,901	1,897	1,908	1,903	1,903	1,903	1,903	1,903	1,903
	128	2,208	2,083	2,166	2,145	2,208	2,180	2,180	2,176	2,180	2,180	2,180
	256	2,235	1,943	2,128	2,078	2,234	2,162	2,162	2,153	2,162	2,162	2,162
	512	2,214	1,854	2,059	1,998	2,214	2,106	2,106	2,093	2,106	2,106	2,106
	1.024	2,170	1,871	2,021	1,970	2,170	2,062	2,062	2,051	2,062	2,062	2,062
	2.048	2,114	1,917	2,006	1,974	2,115	2,034	2,034	2,027	2,034	2,034	2,034
	4.096	2,067	1,953	2,002	1,984	2,067	2,018	2,018	2,013	2,018	2,018	2,018
	8.192	2,036	1,975	2,000	1,991	2,036	2,009	2,009	2,007	2,009	2,009	2,009
	16.384	2,019	1,987	2,000	1,995	2,019	2,005	2,005	2,003	2,005	2,005	2,005
	32.768	2,010	1,993	2,000	1,998	2,010	2,002	2,002	2,002	2,002	2,002	2,002
	65.536	2,005	1,997	2,000	1,999	2,005	2,001	2,001	2,001	2,001	2,001	2,001
	131.072	2,002	1,998	2,000	1,999	2,002	2,001	2,001	2,000	2,001	2,001	2,001
	262.144	2,001	1,999	2,000	2,000	2,001	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000
	524.288	2,001	2,000	2,000	2,000	2,001	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000
	1.048.576	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000

A Fig. 5.7 apresenta o campo de temperaturas para o Problema B. Na Fig. 5.7(a) é apresentada uma comparação entre os esquemas MAk, MHk e a solução exata para uma malha com 16 volumes. Observa-se da Fig. 5.5 que o valor de L na malha $N = 16$ para os esquemas MAk e MHk são praticamente iguais e, portanto, este resultado é evidenciado no campo de temperaturas.

Na Fig. 5.7(b) o campo de temperaturas é plotado para o esquema MAk e o número de volumes utilizados para os cálculos são indicados nesta mesma figura.



(a) Comparação entre os campos de temperatura para os esquemas MAk e MHk



(b) Comparação entre os campos de temperatura para o esquema MAk em diferentes malhas

Figura 5.7: Campo de temperaturas para o Problema B

A Tab. 5.6 apresenta a ordenação dos resultados do melhor para o pior esquema de cálculo de k na face do VC para o erro de discretização. Esta análise considera os resultados para todas as malhas a partir da qual é definido o intervalo convergente.

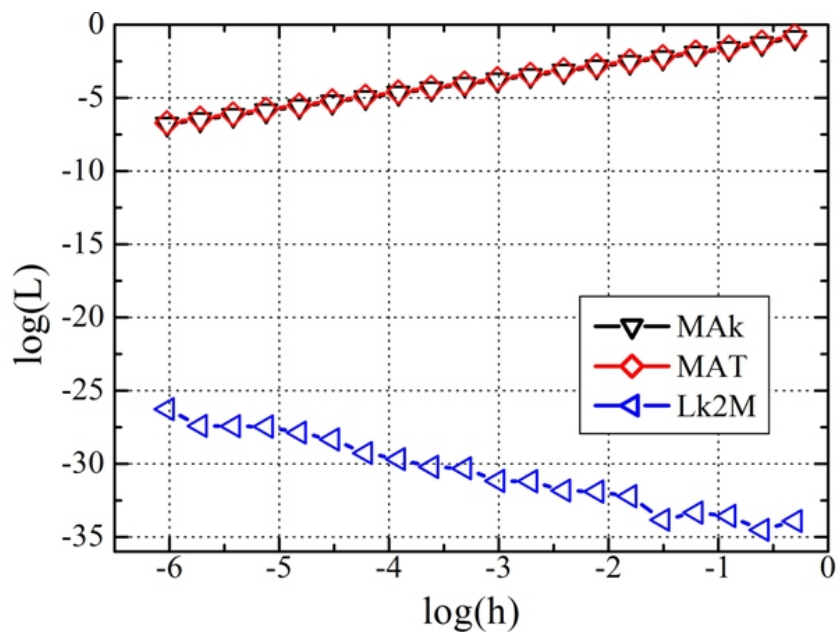
Tabela 5.6: Ordenação por resultados do erro de discretização para o Problema B

ordem de resultados	1	2	3	3	3	3	3	8	9	10	11
esquemas	MAk	TkMH	DK1D	KG2P	KG3P	KG4P	KG6P	Lk2M	MAT	LTMH	MHk

Para os resultados apresentados no Problema A e Problema B, é possível concluir que em problemas de condução de calor com apenas um único material onde a condutividade térmica varia suavemente com a temperatura, o esquema recomendado para cálculo de k na face do VC é o MAk. Tal observação leva em consideração, também, a facilidade na implementação computacional.

5.1.3 Resultados para o Problema C

Os resultados para o erro de discretização do Problema C se dividem em dois grupos distintos. O primeiro deles é composto pelos esquemas MHk, LTMH, TkMH, KG4P, KG6P, DK1D e Lk2M que não apresentam erros de discretização e o segundo grupo por esquemas com erros de discretização. Os esquemas com erros de discretização são: MAk, MAT, KG2P e KG3P. Desses quatro esquemas que possuem erros de discretização, o MAk tem os melhores resultados e o MAT os piores. A Fig. 5.8 mostra as curvas desses dois esquemas que possuem erros de discretização e, também, a curva para o Lk2M como representante dos esquemas que não possuem esses erros.

**Figura 5.8:** Média da norma l_1 dos erros verdadeiros (E) para o Problema C

A Tab. 5.7 apresenta os valores da média da norma l_1 do erro de discretização para o esquema Lk2M. Nessa tabela, também, é feita a comparação com base no parâmetro R , Eq. (5.1), entre todos os esquemas de cálculo da condutividade térmica em relação ao Lk2M, considerando o número de volumes (N) utilizados nas análises.

A diferença média entre o MAk e o MAT é de aproximadamente 23,52%, considerando os resultados para todas as malhas. Da Tab. 5.7, pode-se observar que o KG2P tem o mesmo erro de discretização que o MAk. O esquema KG3P tem valor de erro numérico intermediário entre o MAk e o MAT.

Tabela 5.7: Comparação entre os esquemas de cálculo da condutividade térmica para o Problema C

malha	referência (L_1)	----- R -----									
N	Lk2M	MAk	MHk	MAT	LTMH	TkMH	KG2P	KG3P	KG4P	KG6P	DK1D
2	1,2037 10^{-34}	1,0449 10^{33}	0,6000	1,4379 10^{33}	0,6000	0,6000	1,0449 10^{33}	1,2664 10^{33}	1,0000	1,0000	0,6000
4	3,0093 10^{-35}	1,6698 10^{33}	1,8000	2,1363 10^{33}	1,8000	1,8000	1,6698 10^{33}	1,9410 10^{33}	1,0000	1,0000	1,8000
8	2,6632 10^{-34}	8,5723 10^{31}	1,0000	1,0694 10^{32}	1,0000	1,0000	8,5723 10^{31}	9,8193 10^{31}	1,0000	1,0000	1,0000
16	4,5816 10^{-34}	2,3827 10^{31}	1,0000	2,9407 10^{31}	1,0000	1,0000	2,3827 10^{31}	2,7120 10^{31}	1,0000	1,0000	1,0000
32	1,4680 10^{-34}	3,6388 10^{31}	1,0410	4,4686 10^{31}	1,0410	1,0410	3,6388 10^{31}	4,1296 10^{31}	1,0000	1,0000	1,0410
64	5,9770 10^{-33}	4,4212 10^{29}	1,0023	5,4165 10^{29}	1,0023	1,0023	4,4212 10^{29}	5,0104 10^{29}	1,0000	1,0000	1,0023
128	1,2344 10^{-32}	1,0647 10^{29}	1,0046	1,3028 10^{29}	1,0046	1,0046	1,0647 10^{29}	1,2058 10^{29}	1,0000	1,0000	1,0046
256	1,4677 10^{-32}	4,4657 10^{28}	0,9929	5,4613 10^{28}	0,9929	0,9929	4,4657 10^{28}	5,0555 10^{28}	1,0000	1,0000	0,9929
512	6,3571 10^{-32}	5,1485 10^{27}	0,9990	6,2944 10^{27}	0,9990	0,9990	5,1485 10^{27}	5,8275 10^{27}	1,0000	1,0000	0,9990
1.024	6,7022 10^{-32}	2,4401 10^{27}	1,0169	2,9828 10^{27}	1,0169	1,0169	2,4401 10^{27}	2,7617 10^{27}	1,0000	1,0000	1,0169
2.048	4,8874 10^{-31}	1,6725 10^{26}	1,0000	2,0444 10^{26}	1,0000	1,0000	1,6725 10^{26}	1,8929 10^{26}	1,0000	1,0000	1,0000
4.096	6,0915 10^{-31}	6,7086 10^{25}	1,0000	8,1997 10^{25}	1,0000	1,0000	6,7086 10^{25}	7,5922 10^{25}	1,0000	1,0000	1,0000
8.192	2,0341 10^{-30}	1,0044 10^{25}	1,0000	1,2276 10^{25}	1,0000	1,0000	1,0044 10^{25}	1,1367 10^{25}	1,0000	1,0000	1,0000
16.384	5,3065 10^{-30}	1,9250 10^{24}	1,0000	2,3528 10^{24}	1,0000	1,0000	1,9250 10^{24}	2,1785 10^{24}	1,0000	1,0000	1,0000
32.768	4,5172 10^{-29}	1,1306 10^{23}	1,0000	1,3819 10^{23}	1,0000	1,0000	1,1306 10^{23}	1,2795 10^{23}	1,0000	1,0000	1,0000
65.536	1,3357 10^{-28}	1,9119 10^{22}	1,0000	2,3368 10^{22}	1,0000	1,0000	1,9119 10^{22}	2,1637 10^{22}	1,0000	1,0000	1,0000
131.072	3,4385 10^{-28}	3,7133 10^{21}	1,0000	4,5385 10^{21}	1,0000	1,0000	3,7133 10^{21}	4,2023 10^{21}	1,0000	1,0000	1,0000
262.144	3,6326 10^{-28}	1,7574 10^{21}	1,0000	2,1480 10^{21}	1,0000	1,0000	1,7574 10^{21}	1,9889 10^{21}	1,0000	1,0000	1,0000
524.288	3,7942 10^{-28}	8,4130 10^{20}	1,0000	1,0283 10^{21}	1,0000	1,0000	8,4130 10^{20}	9,5209 10^{20}	1,0000	1,0000	1,0000
1.048.576	5,3554 10^{-27}	2,9802 10^{19}	1,0000	3,6425 10^{19}	1,0000	1,0000	2,9802 10^{19}	3,3727 10^{19}	1,0000	1,0000	1,0000

Pode-se explicar o fato do KG2P ter o mesmo resultado que o MAk pela forma com que é realizada a integração numérica. A utilização da quadratura gaussiana deve ser feita em funções contínuas e bem comportadas (SZIDAROVSKY; YAKOWITZ, 1978), o que não acontece no Problema C. No caso, como a função condutividade térmica do Problema C possui valores constantes (ver Fig. 4.6) e o número de pontos na quadratura do esquema KG2P permite uma simetria nas posições dos pontos de Gauss, o valor da condutividade térmica na face do VC é igual à média dos valores de k_1 e k_2 .

Na posição espacial $x = 0,5$, o esquema KG3P não possui simetria de valores em relação às

posições dos pontos de Gauss, o que não permite a avaliação adequada da integração numérica e, conseqüentemente, do cálculo da condutividade térmica na face do VC. Ainda, o valor da condutividade térmica na face do VC é, para o Problema C, igual à média harmônica, conforme Patankar (1980). Assim, o MAK, o KG2P e o KG3P não conseguem reproduzir a média harmônica. O mesmo pode ser dito em relação ao MAT que, pela sua própria formulação, não chega neste resultado.

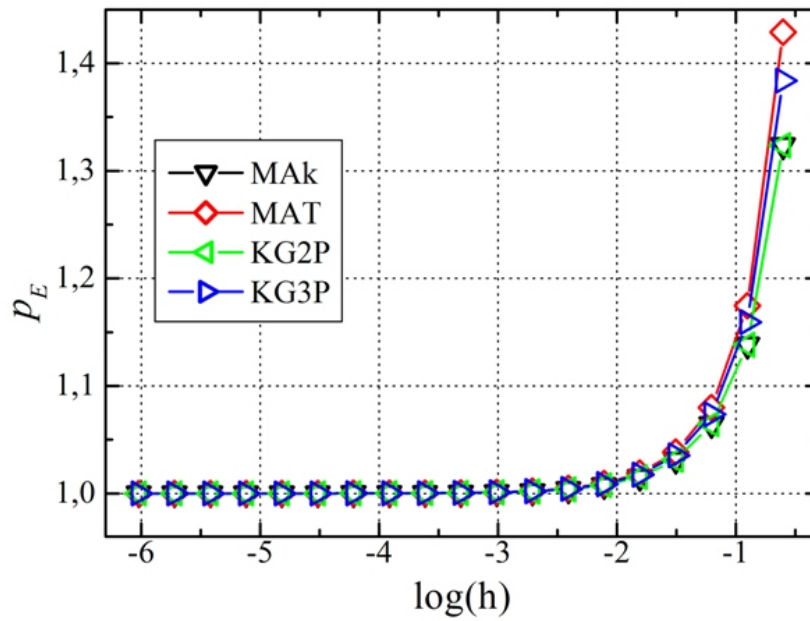


Figura 5.9: Ordem efetiva do erro de discretização para o Problema C

Desconsiderando os esquemas que não obtêm o resultado exato da condutividade térmica na face do VC, os valores listados na Tab. 5.7 para os outros esquemas são referentes apenas aos erros de arredondamento. Assim, quanto menor a malha (h), maiores são esses erros. A Tab. C.1 apresentada no Apêndice C contém os valores de L , Eq. (4.10), para todos os esquemas avaliados.

A Fig. 5.9 e a Tab. 5.8 mostram o comportamento em relação à ordem efetiva dos erros de discretização dos esquemas MAK, MAT, KG2P e KG3P.

No Problema C, para os esquemas de cálculo de k que apresentam apenas erros de arredondamento, a solução obtida é a exata. Para os esquemas MAK, MAT, KG2P e KG3P, a ordem efetiva da aproximação converge para a unidade quando $h \rightarrow 0$.

A Tab. 5.9 apresenta a ordenação dos resultados do melhor para o pior esquema de cálculo de k na face do VC para o erro de discretização.

Tabela 5.8: Ordem efetiva do erro de discretização para o Problema C

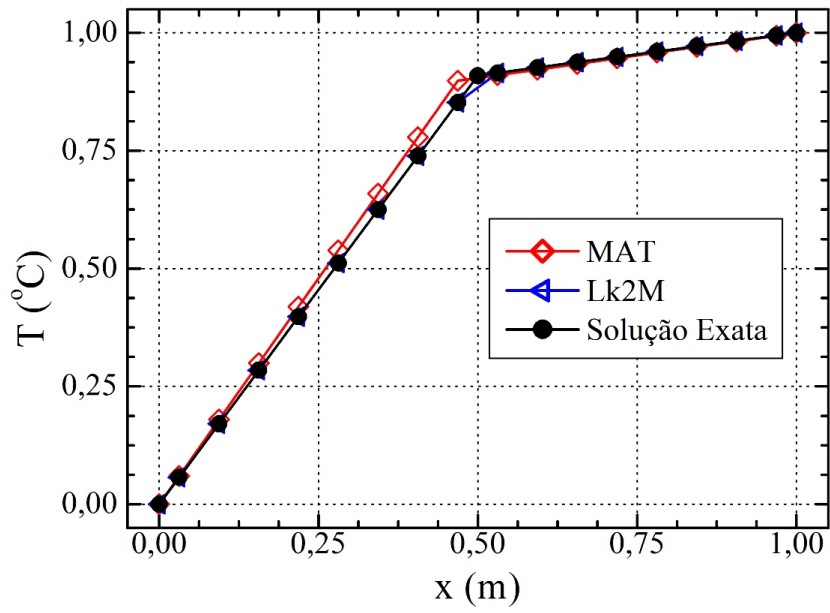
malha	Ordem efetiva			
N	MAk	MAT	KG2P	KG3P
4	1,324	1,429	1,324	1,384
8	1,138	1,174	1,138	1,159
16	1,064	1,080	1,064	1,074
32	1,031	1,038	1,031	1,035
64	1,015	1,019	1,015	1,017
128	1,008	1,009	1,008	1,009
256	1,004	1,005	1,004	1,004
512	1,002	1,002	1,002	1,002
1.024	1,001	1,001	1,001	1,001
2.048	1,000	1,001	1,000	1,001
4.096	1,000	1,000	1,000	1,000
8.192	1,000	1,000	1,000	1,000
16.384	1,000	1,000	1,000	1,000
32.768	1,000	1,000	1,000	1,000
65.536	1,000	1,000	1,000	1,000
131.072	1,000	1,000	1,000	1,000
262.144	1,000	1,000	1,000	1,000
524.288	1,000	1,000	1,000	1,000
1.048.576	1,000	1,000	1,000	1,000

Tabela 5.9: Ordenação por resultados do erro de discretização para o Problema C

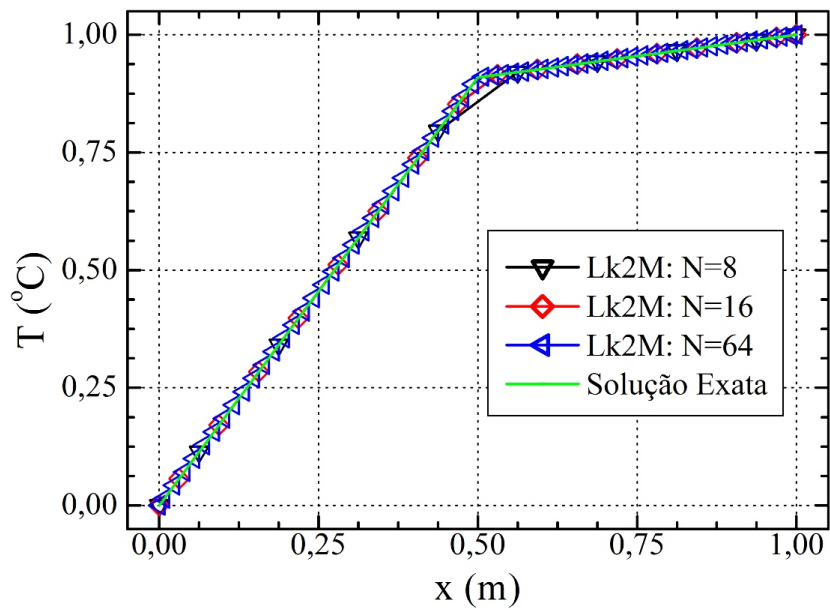
ordem de resultados	1	1	1	4	4	4	4	8	8	10	11
esquemas	Lk2M	KG4P	KG6P	MHk	DK1D	LTMH	TkMH	MAk	KG2P	KG3P	MAT

A Fig. 5.10 apresenta o campo de temperaturas para o Problema C. Na Fig. 5.10(a) é apresentada uma comparação entre os esquemas MAT, Lk2M e a solução exata para uma malha com 16 volumes. Como o esquema Lk2M consegue obter a solução exata, observa-se esta situação na Fig. 5.10(a). Ainda nesta figura, como o esquema MAT apresenta $L = 1,3473 \cdot 10^{-02}$ para a malha $N = 16$, pode-se observar a variação no campo de temperaturas em relação a solução exata.

Na Fig. 5.10(b) o campo de temperaturas é plotado para o esquema Lk2M com malhas $N = 8$, $N = 16$ e $N = 64$. Como o esquema Lk2M reproduz a solução exata para este problema, em qualquer que seja a malha, existe a coincidência entre as curvas.



(a) Comparação entre os campos de temperatura para os esquemas MAT e Lk2M



(b) Comparação entre os campos de temperatura para o esquema Lk2M em diferentes malhas

Figura 5.10: Campo de temperaturas para o Problema C

5.1.4 Resultados para o Problema D

Os resultados para o Problema D, em relação ao erro de discretização, se dividem em dois grupos distintos. Essa divisão é feita levando em consideração a proximidade entre os resultados dos erros numéricos associados aos esquemas para o cálculo de k nas faces do VC. O primeiro

grupo é composto pelos esquemas MAk, MAT, KG2P e KG3P. O segundo grupo, com erros de discretização aproximadamente iguais, é dado pelos esquemas MHk, LTMH, TkMH, Lk2M, KG4P, KG6P e DK1D.

A Fig. 5.11 mostra a diferença entre os esquemas MAT e o TkMH. O MAT representa o primeiro grupo e, dentre todos, é o que apresenta maior erro de discretização. O TkMH apresenta o menor erro de discretização, e é o representante do segundo grupo.

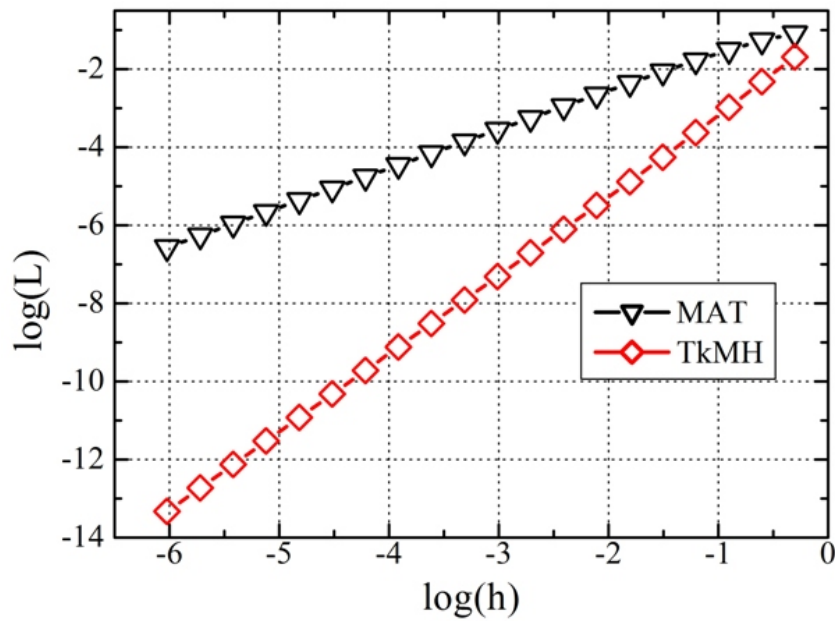


Figura 5.11: Média da norma l_1 dos erros verdadeiros (E) para o Problema D

A Tab. 5.10 apresenta os valores da média da norma l_1 do erro de discretização para o esquema com menor erro de discretização que é o TkMH. Nessa tabela, também, é feita a comparação com base no parâmetro R , Eq. (5.1), entre todos os esquemas de cálculo da condutividade térmica em relação ao TkMH. Ainda, na Tab. 5.10 se observa que a diferença média no desempenho dos dois esquemas, MAT e TkMH, representantes dos dois grupos de desempenho em relação ao erro de discretização, em valores absolutos é de aproximadamente 40.843.433%. Essa diferença média é obtida para as malhas com $N = 64$ até $N = 1.048.576$, sendo que essas malhas definem o intervalo convergente. Para a malha com $N = 1.048.576$, a diferença máxima no erro de discretização é 571.857.508%.

Como dito anteriormente, existem dois grupos distintos quando se observa o desempenho dos esquemas de cálculo da condutividade térmica em relação aos erros de discretização. Para o primeiro grupo, a diferença média entre o melhor (KG3P) e o pior (MAT) dos esquemas deste grupo é de 4,85%. Para o segundo grupo, a diferença média entre o esquema MHk e o TkMH,

respectivamente, esquemas de pior e melhor desempenho nesse grupo, é de aproximadamente 218,63%. Essas análises levam em consideração o intervalo convergente obtido a partir das malhas com $N = 64$ até $N = 1.048.576$.

Tabela 5.10: Comparação entre os esquemas de cálculo da condutividade térmica para o Problema D

malha	referência (L_1)	----- R -----									
N	TkMH	MAk	MHk	MAT	LTMH	KG2P	KG3P	Lk2M	KG4P	KG6P	DK1D
2	2,0349 10^{-02}	1,2862 10^1	0,5175	4,0433 10^0	0,2746	1,2901 10^1	1,1426 10^1	0,2146	0,1842	0,7802	0,9272
4	4,7688 10^{-03}	1,9990 10^1	2,2270	1,1242 10^1	1,2313	1,9677 10^1	1,8669 10^1	1,0928	1,0799	0,7658	0,8851
8	1,0504 10^{-03}	3,8837 10^1	2,4125	2,9305 10^1	1,3900	3,8395 10^1	3,6882 10^1	1,3366	1,3375	0,9145	0,9843
16	2,3485 10^{-04}	8,0204 10^1	2,7238	7,0328 10^1	1,5466	7,9708 10^1	7,6911 10^1	1,5682	1,5787	1,0755	1,1012
32	5,4517 10^{-05}	1,6599 10^2	2,9300	1,5699 10^2	1,6587	1,6547 10^2	1,5997 10^2	1,7464	1,7722	1,1954	1,1899
64	1,3058 10^{-05}	3,3965 10^2	3,0595	3,3363 10^2	1,7311	3,3912 10^2	3,2815 10^2	1,8529	1,8832	1,2694	1,2450
128	3,1904 10^{-06}	6,8823 10^2	3,1304	6,8895 10^2	1,7688	6,8768 10^2	6,6573 10^2	1,9124	1,9450	1,3106	1,2758
256	7,8814 10^{-07}	1,3861 10^3	3,1677	1,4007 10^3	1,7886	1,3855 10^3	1,3416 10^3	1,9438	1,9777	1,3325	1,2921
512	1,9584 10^{-07}	2,7821 10^3	3,1869	2,8249 10^3	1,7988	2,7815 10^3	2,6936 10^3	1,9598	1,9946	1,3437	1,3005
1.024	4,8811 10^{-08}	5,5743 10^3	3,1966	5,6734 10^3	1,8040	5,5737 10^3	5,3979 10^3	1,9680	2,0031	1,3494	1,3047
2.048	1,2184 10^{-08}	1,1159 10^4	3,2015	1,1371 10^4	1,8066	1,1158 10^4	1,0806 10^4	1,9721	2,0074	1,3522	1,3069
4.096	3,0436 10^{-09}	2,2328 10^4	3,2039	2,2765 10^4	1,8079	2,2327 10^4	2,1624 10^4	1,9741	2,0096	1,3537	1,3079
8.192	7,6062 10^{-10}	4,4666 10^4	3,2052	4,5555 10^4	1,8085	4,4666 10^4	4,3258 10^4	1,9752	2,0106	1,3544	1,3085
16.384	1,9012 10^{-10}	8,9343 10^4	3,2058	9,1134 10^4	1,8089	8,9342 10^4	8,6527 10^4	1,9757	2,0112	1,3548	1,3087
32.768	4,7525 10^{-11}	1,7870 10^5	3,2061	1,8229 10^5	1,8090	1,7869 10^5	1,7307 10^5	1,9759	2,0114	1,3549	1,3089
65.536	1,1881 10^{-11}	3,5740 10^5	3,2062	3,6461 10^5	1,8091	3,5740 10^5	3,4614 10^5	1,9761	2,0116	1,3550	1,3089
131.072	2,9701 10^{-12}	7,1481 10^5	3,2063	7,2924 10^5	1,8091	7,1481 10^5	6,9229 10^5	1,9761	2,0116	1,3551	1,3090
262.144	7,4251 10^{-13}	1,4296 10^6	3,2063	1,4585 10^6	1,8092	1,4296 10^6	1,3846 10^6	1,9762	2,0117	1,3551	1,3090
524.288	1,8563 10^{-13}	2,8593 10^6	3,2064	2,9170 10^6	1,8092	2,8593 10^6	2,7692 10^6	1,9762	2,0117	1,3551	1,3090
1.048.576	4,6407 10^{-14}	5,7186 10^6	3,2064	5,8341 10^6	1,8092	5,7186 10^6	5,5384 10^6	1,9762	2,0117	1,3551	1,3090

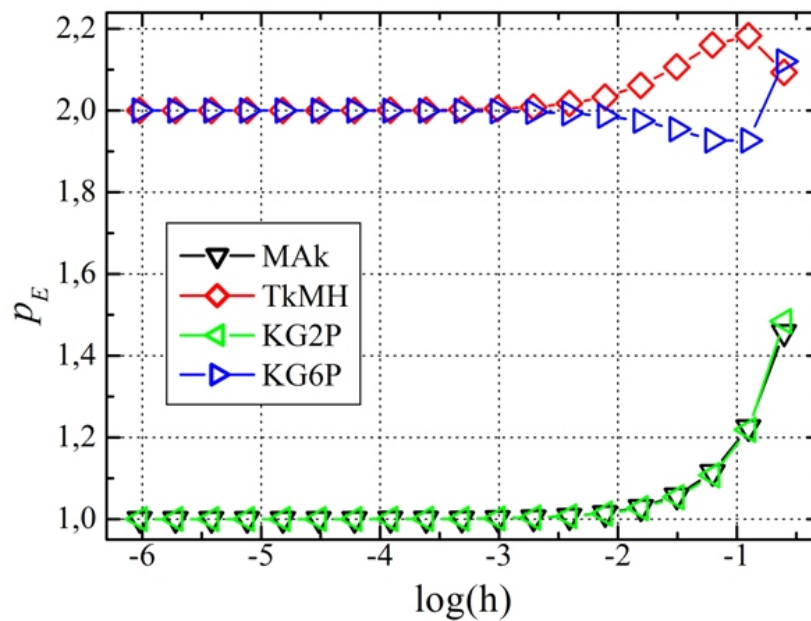


Figura 5.12: Ordem efetiva do erro de discretização para o Problema D

A Fig. 5.12 apresenta a ordem efetiva do erro de discretização para quatro esquemas. Nessa figura é possível observar que dois dos esquemas têm ordem efetiva tendendo para dois quando $h \rightarrow 0$, e os outros dois esquemas têm ordem efetiva tendendo à unidade. A Tab. 5.11 apresenta a ordem efetiva do erro de discretização para todos os esquemas avaliados.

Pode-se concluir que os esquemas MAk, MAT, KG2P e KG3P não são indicados para problemas com dois materiais diferentes ou onde existam variações abruptas na condutividade térmica. Isto pode ser observado nas análises feitas para os Problemas C e D. Esses esquemas apresentaram maiores erros de discretização quando comparados aos demais.

A Tab. D.1 apresentada no Apêndice D contém os valores de L , Eq. (4.10), para todos os esquemas avaliados.

Tabela 5.11: Ordem efetiva do erro de discretização para o Problema D

malha	Ordem efetiva											
N	MAk	MHk	MAT	LTMH	TkMH	KG2P	KG3P	Lk2M	KG4P	KG6P	DK1D	
4	1,457	-0,012	0,618	-0,071	2,093	1,484	1,385	-0,255	-0,458	2,120	2,160	
8	1,225	2,067	0,800	2,008	2,183	1,218	1,200	1,892	1,874	1,927	2,030	
16	1,115	1,986	0,898	2,007	2,161	1,107	1,101	1,931	1,922	1,927	1,999	
32	1,058	2,002	0,949	2,006	2,107	1,053	1,050	1,952	1,940	1,955	1,995	
64	1,029	1,999	0,974	2,000	2,062	1,027	1,025	1,976	1,974	1,975	1,996	
128	1,014	2,000	0,987	2,002	2,033	1,013	1,013	1,988	1,987	1,987	1,998	
256	1,007	2,000	0,994	2,001	2,017	1,007	1,006	1,994	1,993	1,993	1,999	
512	1,004	2,000	0,997	2,001	2,009	1,003	1,003	1,997	1,996	1,997	1,999	
1.024	1,002	2,000	0,998	2,000	2,004	1,002	1,002	1,998	1,998	1,998	2,000	
2.048	1,001	2,000	0,999	2,000	2,002	1,001	1,001	1,999	1,999	1,999	2,000	
4.096	1,000	2,000	1,000	2,000	2,001	1,000	1,000	2,000	2,000	2,000	2,000	
8.192	1,000	2,000	1,000	2,000	2,001	1,000	1,000	2,000	2,000	2,000	2,000	
16.384	1,000	2,000	1,000	2,000	2,000	1,000	1,000	2,000	2,000	2,000	2,000	
32.768	1,000	2,000	1,000	2,000	2,000	1,000	1,000	2,000	2,000	2,000	2,000	
65.536	1,000	2,000	1,000	2,000	2,000	1,000	1,000	2,000	2,000	2,000	2,000	
131.072	1,000	2,000	1,000	2,000	2,000	1,000	1,000	2,000	2,000	2,000	2,000	
262.144	1,000	2,000	1,000	2,000	2,000	1,000	1,000	2,000	2,000	2,000	2,000	
524.288	1,000	2,000	1,000	2,000	2,000	1,000	1,000	2,000	2,000	2,000	2,000	
1.048.576	1,000	2,000	1,000	2,000	2,000	1,000	1,000	2,000	2,000	2,000	2,000	

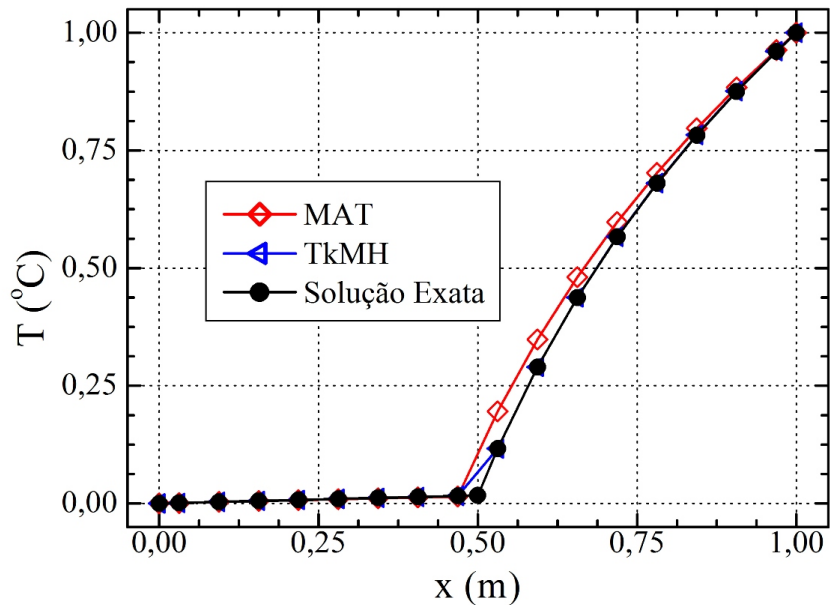
A Tab. 5.12 apresenta a ordenação entre os resultados de todos os esquemas. Na tabela, a ordenação é do melhor para o pior resultado de desempenho dos esquemas em relação ao erro de discretização no intervalo convergente.

Tabela 5.12: Ordenação por resultados do erro de discretização para o Problema D

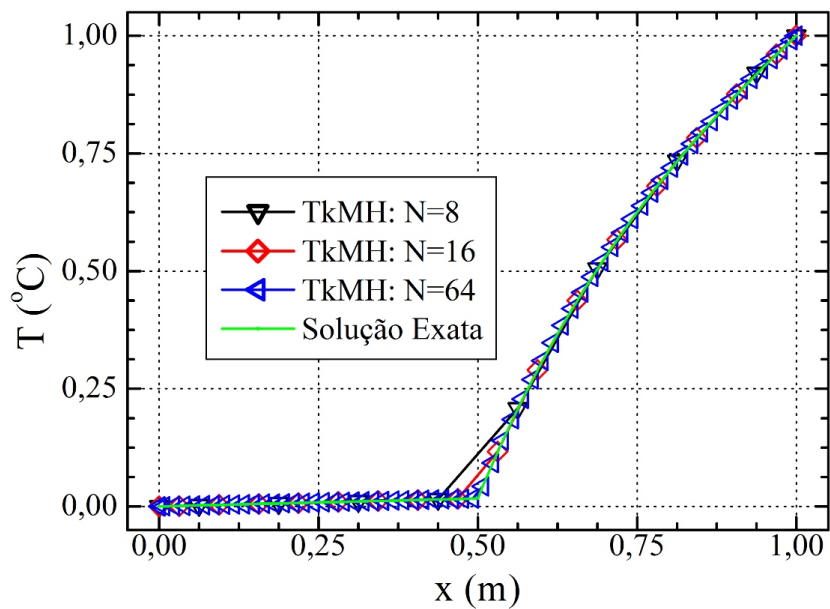
ordem de resultados	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
esquemas	TkMH	DK1D	KG6P	LTMH	Lk2M	KG4P	MHk	KG3P	KG2P	MAk	MAT

A Fig. 5.13 apresenta o campo de temperaturas para o Problema D. Na Fig. 5.13(a) é apresentada uma comparação entre os esquemas MAT, TkMH e a solução exata para uma malha com $N = 16$. Esta figura evidencia que os maiores erros de discretização acontecem na região

de menor condutividade térmica. Observa-se, também, que a solução obtida para o campo de temperaturas do esquema TkMH tem a curva coincidente com a solução exata em função do baixo erro de discretização.



(a) Comparação entre os campos de temperatura para os esquemas MAT e TkMH



(b) Comparação entre os campos de temperatura para o esquema TkMH em diferentes malhas

Figura 5.13: Campo de temperaturas para o Problema D

Na Fig. 5.13(b) o campo de temperaturas é plotado para o esquema TkMH e o número

de volumes utilizados para os cálculos são indicados nesta mesma figura. Como o erro de discretização é baixo em todas as malhas analisadas, as curvas do campo de temperaturas plotadas são coincidentes.

5.1.5 Resultados para o Problema E

Os resultados obtidos para o Problema E levam em consideração o efeito da advecção. Para esse problema foram experimentados doze esquemas diferentes para o cálculo da condutividade térmica na face do VC. A Fig. 5.14 apresenta os erros de discretização em função de h para uma razão de refino de malha igual a dois. Essa figura mostra os resultados para o esquema MHk que apresentou os maiores erros de discretização e, também, o esquema KG2P como um dos representantes dos esquemas com menor erro de discretização.

A Tab. 5.13 apresenta os valores da média da norma l_1 do erro de discretização para um dos esquema com menor erro de discretização que é o KG2P. Nessa tabela, também, é feita a comparação com base no parâmetro R , Eq. (5.1), entre todos os esquemas de cálculo da condutividade térmica em relação ao KG2P.

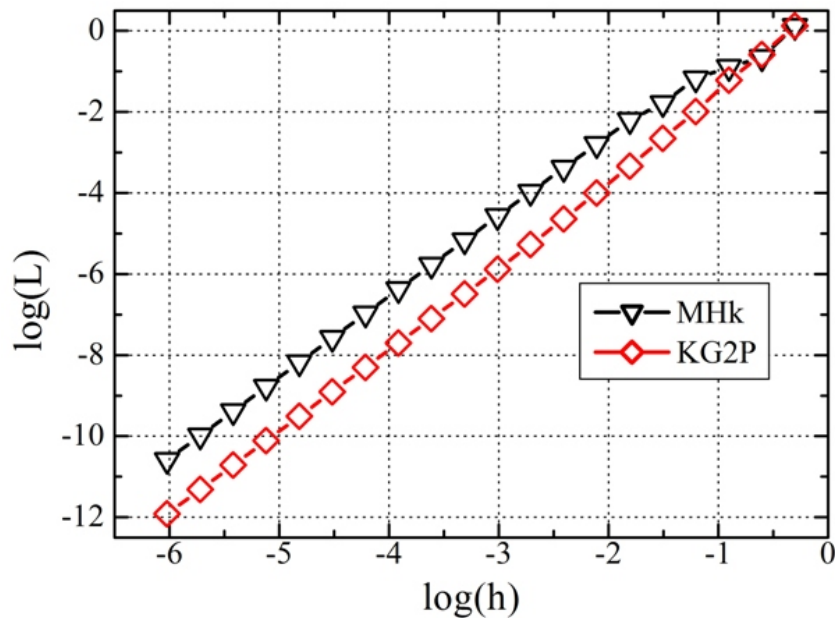


Figura 5.14: Média da norma l_1 dos erros verdadeiros (E) para o Problema E

Pode-se observar na Tab. 5.13 que os esquemas KG2P, KG3P, KG4P, KG6P e DK1D apresentam erros de discretização iguais. Desses, os esquemas KG2P, KG3P, KG4P e KG6P apresentam resultados iguais porque o processo de integração numérica é realizado de forma exata em todos eles.

Tabela 5.13: Comparação entre os esquemas de cálculo da condutividade térmica para o Problema E

malha	referência (L_1)	R										
N	KG2P	MAk	MHk	MAT	LTMH	TkMH	KG3P	Lk2M	KG4P	KG6P	DK1D	AD1D
2	1,3322 10^{-00}	1,0024	0,9817	0,9987	0,9954	1,0032	1,0000	0,9996	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997
4	2,6057 10^{-01}	0,8352	0,8512	1,2562	1,0527	1,0616	1,0000	1,0440	1,0000	1,0000	1,0000	1,2555
8	6,1069 10^{-02}	0,6564	2,0813	1,7509	1,8508	0,7629	1,0000	1,3728	1,0000	1,0000	1,0000	1,1316
16	1,0135 10^{-02}	0,4283	6,5420	1,5021	3,6307	0,4691	1,0000	1,2263	1,0000	1,0000	1,0000	1,1036
32	2,2254 10^{-03}	0,9050	7,3646	1,7670	3,7178	1,2285	1,0000	1,2350	1,0000	1,0000	1,0000	1,1860
64	4,6229 10^{-04}	1,7297	13,4825	2,1592	4,7559	2,3882	1,0000	1,3070	1,0000	1,0000	1,0000	1,2876
128	9,9839 10^{-05}	2,4795	15,9614	2,5098	5,8111	3,4044	1,0000	1,3831	1,0000	1,0000	1,0000	1,3767
256	2,2736 10^{-05}	2,9971	18,1245	2,7581	6,5825	4,1036	1,0000	1,4412	1,0000	1,0000	1,0000	1,4393
512	5,3897 10^{-06}	3,3098	19,5254	2,9095	7,0588	4,5228	1,0000	1,4778	1,0000	1,0000	1,0000	1,4773
1.024	1,3096 10^{-06}	3,4826	20,3257	2,9936	7,3254	4,7534	1,0000	1,4985	1,0000	1,0000	1,0000	1,4984
2.048	3,2262 10^{-07}	3,5737	20,7540	3,0381	7,4668	4,8747	1,0000	1,5096	1,0000	1,0000	1,0000	1,5095
4.096	8,0053 10^{-08}	3,6204	20,9758	3,0610	7,5396	4,9369	1,0000	1,5152	1,0000	1,0000	1,0000	1,5152
8.192	1,9938 10^{-08}	3,6441	21,0886	3,0726	7,5765	4,9684	1,0000	1,5181	1,0000	1,0000	1,0000	1,5181
16.384	4,9750 10^{-09}	3,6561	21,1455	3,0784	7,5952	4,9842	1,0000	1,5196	1,0000	1,0000	1,0000	1,5196
32.768	1,2426 10^{-09}	3,6620	21,1741	3,0813	7,6045	4,9922	1,0000	1,5203	1,0000	1,0000	1,0000	1,5203
65.536	3,1049 10^{-10}	3,6650	21,1884	3,0828	7,6092	4,9962	1,0000	1,5207	1,0000	1,0000	1,0000	1,5207
131.072	7,7604 10^{-11}	3,6665	21,1955	3,0835	7,6115	4,9982	1,0000	1,5209	1,0000	1,0000	1,0000	1,5209
262.144	1,9399 10^{-11}	3,6673	21,1991	3,0839	7,6127	4,9992	1,0000	1,5210	1,0000	1,0000	1,0000	1,5210
524.288	4,8494 10^{-12}	3,6677	21,2009	3,0841	7,6133	4,9997	1,0000	1,5210	1,0000	1,0000	1,0000	1,5210
1.048.576	1,2123 10^{-12}	3,6679	21,2018	3,0842	7,6136	4,9999	1,0000	1,5210	1,0000	1,0000	1,0000	1,5210

A diferença percentual entre o melhor e o pior esquema em relação ao erro de discretização é calculada com base nos valores da Tab. 5.13, sendo esta diferença média de aproximadamente 1.881%. Essa média é obtida com base nos resultados dos esquemas MHk e KG2P a partir das malhas com $N = 64$ até $N = 1.048.576$ que estão no intervalo convergente. A diferença máxima obtida foi de 2.020% para a malha com $N = 1.048.576$.

O esquema AD1D, especialmente idealizado para problemas de advecção-difusão, tem resultados em média 48,2% maiores que aqueles obtidos com o KG2P.

A Fig. 5.15 mostra a ordem efetiva de discretização para quatro dos esquemas e a Tab. 5.14 apresenta os valores para todos os esquemas avaliados no Problema E. Observa-se que todos os esquemas convergem para a ordem efetiva igual a dois quando $h \rightarrow 0$.

A Tab. E.1 apresentada no Apêndice E contém os valores de L , Eq. (4.10), para todos os esquemas avaliados.

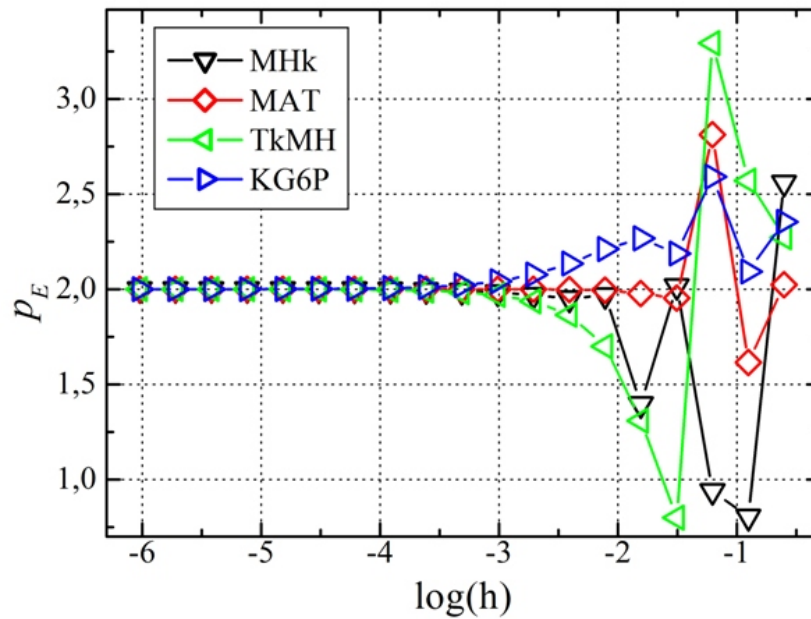


Figura 5.15: Ordem efetiva do erro de discretização para o Problema E

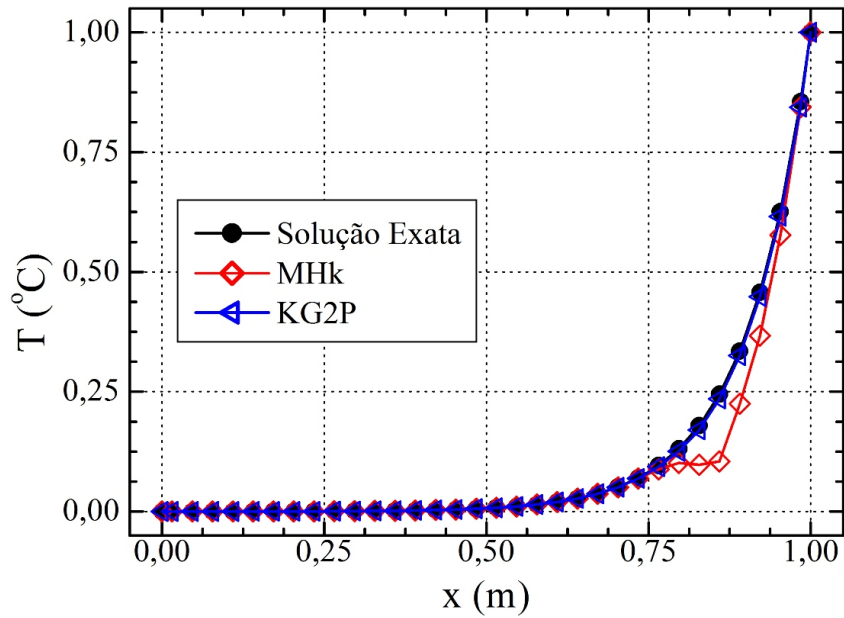
Tabela 5.14: Ordem efetiva do erro de discretização para o Problema E

malha	Ordem efetiva											
N	MAk	MHk	MAT	LTMH	TkMH	KG2P	KG3P	Lk2M	KG4P	KG6P	DK1D	AD1D
4	2,617	2,560	2,023	2,273	2,272	2,354	2,354	2,291	2,354	2,354	2,354	2,025
8	2,441	0,803	1,614	1,279	2,570	2,093	2,093	1,698	2,093	2,093	2,093	2,243
16	3,207	0,939	2,812	1,619	3,293	2,591	2,591	2,754	2,591	2,591	2,591	2,627
32	1,108	2,016	1,953	2,153	0,798	2,187	2,187	2,177	2,187	2,187	2,187	2,083
64	1,333	1,395	1,978	1,912	1,308	2,267	2,267	2,185	2,267	2,267	2,267	2,149
128	1,692	1,968	1,994	1,922	1,700	2,211	2,211	2,129	2,211	2,211	2,211	2,115
256	1,861	1,951	1,999	1,955	1,865	2,135	2,135	2,075	2,135	2,135	2,135	2,070
512	1,934	1,969	2,000	1,976	1,936	2,077	2,077	2,040	2,077	2,077	2,077	2,039
1.024	1,968	1,983	2,000	1,988	1,969	2,041	2,041	2,021	2,041	2,041	2,041	2,021
2.048	1,984	1,991	2,000	1,994	1,985	2,021	2,021	2,011	2,021	2,021	2,021	2,011
4.096	1,992	1,995	2,000	1,997	1,993	2,011	2,011	2,005	2,011	2,011	2,011	2,005
8.192	1,996	1,998	2,000	1,998	1,996	2,005	2,005	2,003	2,005	2,005	2,005	2,003
16.384	1,998	1,999	2,000	1,999	1,998	2,003	2,003	2,001	2,003	2,003	2,003	2,001
32.768	1,999	1,999	2,000	2,000	1,999	2,001	2,001	2,001	2,001	2,001	2,001	2,001
65.536	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,001	2,001	2,000	2,001	2,001	2,001	2,000
131.072	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000
262.144	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000
524.288	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000
1.048.576	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000

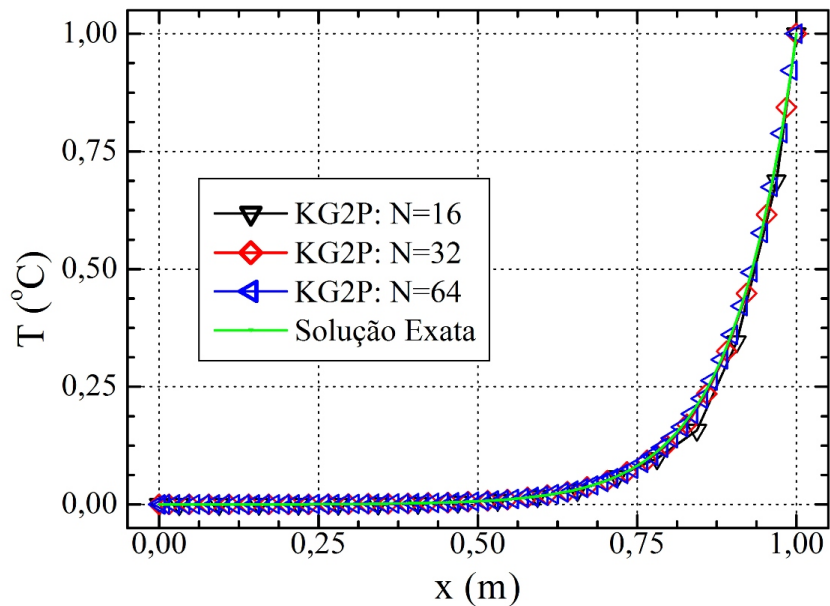
A Tab. 5.15 apresenta a ordenação entre os resultados dos diversos esquemas. Na tabela, a ordenação é do melhor para o pior resultado de desempenho dos esquemas em relação ao erro de discretização.

Tabela 5.15: Ordenação por resultados do erro de discretização para o Problema E

ordem de resultados	1	1	1	1	1	6	7	8	9	10	11	12
esquemas	KG2P	KG3P	KG4P	KG6P	DK1D	AD1D	Lk2M	MAT	MAk	TkMH	LTMH	MHk



(a) Comparação entre os campos de temperatura para os esquemas MHk e KG2P



(b) Comparação entre os campos de temperatura para o esquema KG2P em diferentes malhas

Figura 5.16: Campo de temperaturas para o Problema E

A Fig. 5.16 apresenta o campo de temperaturas para o Problema D. Na Fig. 5.16(a) é apresentada uma comparação entre os esquemas MHk, KG2P e a solução exata para uma malha com 32 volumes. Nesta figura se observa que o efeito da advecção, para o esquema MHk, faz o erro de discretização se acumular próximo ao final do domínio de cálculo. Ainda, pode-se observar que o esquema KG2P, por possuir baixo erro de discretização, apresenta a curva do campo de temperaturas coincidente com a solução analítica.

Na Fig. 5.16(b) o campo de temperaturas é plotado para o esquema KG2P para as malhas $N = 16$, $N = 32$ e $N = 64$.

5.2 CUSTO COMPUTACIONAL

A análise do custo computacional é feita em função do tempo gasto na etapa de processamento de dados para cada um dos esquemas de cálculo de k avaliados, considerando, também, o uso de memória *cache*. A avaliação do custo computacional foi feita para um mesmo critério de convergência de $TOL = 1 \cdot 10^{-10}$ em todas as malhas e problemas analisados.

O critério de convergência (TOL) é baseado na norma l_∞ , sendo dado por:

$$Res = \max_{1 \leq P \leq N} |T(P)^i - T(P)^{i-1}| < TOL \quad (5.3)$$

onde Res é a norma l_∞ , $T(P)^i$ é o vetor solução na iteração atual e $T(P)^{i-1}$ é o vetor solução na iteração anterior.

A Tab. 5.16 apresenta a razão entre o tempo de CPU (em segundos) gasto na solução dos problemas listados na Tab. 4.1 para cada um dos esquemas em relação ao esquema MAK de referência, considerando as malhas $N = 1.024$ e $N = 1.048.576$. A comparação entre os esquemas é feita com base no parâmetro R_1 , sendo

$$R_1 = \frac{T_{cpu_n}}{T_{cpu_{MAK}}} \quad (5.4)$$

onde T_{cpu_n} é o tempo de CPU para o esquema que está sendo avaliado e $T_{cpu_{MAK}}$ é o tempo de CPU para o esquema MAK que é utilizado como referência.

Para saber o tempo de CPU em cada análise basta multiplicar o tempo de referência (em segundos) pela razão entre os tempos de CPU encontrados na Tab. 5.16.

O tempo de CPU gasto para o Problema C é muito pequeno, assim, todos os esquemas

apresentaram resultados muito próximos. Pode-se observar da Tab. 5.16 que para o Problema C o esquema MAT apresenta, para a malha $N = 1.048.576$, valores menores de tempo de CPU que os demais esquemas. Para os outros problemas, o MAk apresentou o menor tempo computacional. Ainda, a Tab. 5.16 permite uma avaliação qualitativa do tempo computacional dos esquemas de cálculo de k . Assim, é possível dizer que, para os Problemas A, B e D, cujas funções condutividade térmica exigem mais cálculos na integração numérica, os esquemas KG2P, KG3P, KG4P e KG6P apresentam, do menor para o maior, respectivamente, os maiores tempos computacionais.

Tabela 5.16: Comparação entre os tempos de CPU

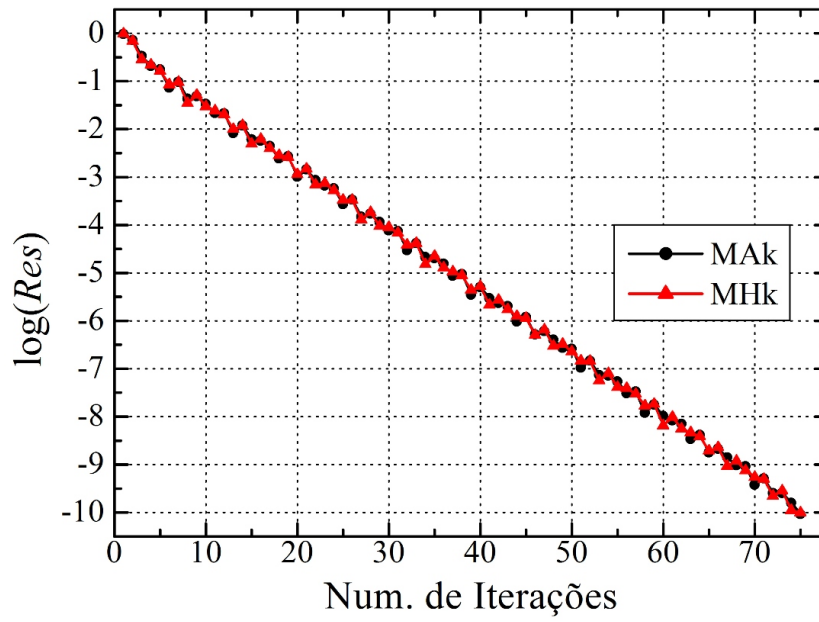
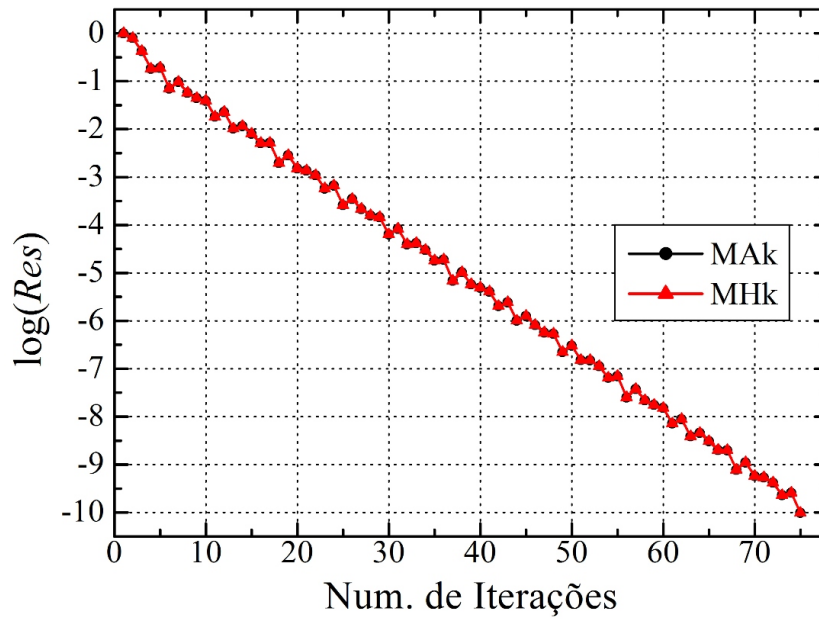
malha		T_{cpu} (s) ----- R_1 -----											
N	problema	MAk	MHk	MAT	LTMH	TkMH	KG2P	KG3P	Lk2M	KG4P	KG6P	DK1D	AD1D
1.024	A	0,017	1,046	1,129	1,491	1,639	2,018	2,296	1,694	3,629	4,064	1,268	-
	B	0,125	1,031	1,054	1,336	1,440	1,760	1,954	1,488	2,943	3,275	1,092	-
	C	0,002	1,103	1,000	1,199	1,103	1,000	1,000	1,500	1,199	1,199	1,199	-
	D	0,020	1,039	1,126	1,481	1,606	1,890	2,150	1,654	3,276	3,701	1,229	-
	E	0,107	1,013	1,016	1,101	1,137	1,242	1,308	1,152	1,634	1,740	1,095	1,338
1.048.576	A	17,854	1,048	1,091	1,482	1,601	1,989	2,249	1,670	3,524	3,992	1,241	-
	B	129,028	1,040	1,038	1,309	1,410	1,714	1,892	1,466	2,852	3,277	1,092	-
	C	1,716	1,055	0,986	1,109	1,132	0,986	0,991	1,314	1,086	1,118	1,055	-
	D	20,623	1,043	1,152	1,494	1,609	1,917	2,173	1,660	3,239	3,705	1,248	-
	E	110,098	1,023	1,010	1,095	1,129	1,235	1,295	1,147	1,623	1,721	1,099	1,330

Como a condutividade térmica é função da temperatura, a solução numérica dos problemas é iterativa. A Tab. 5.17 apresenta, para cada problema, o número de iterações necessárias para se atingir o critério de convergência de $1 \cdot 10^{-10}$. Para o problema C, que possui condutividade térmica independente da temperatura, a solução foi direta.

A Fig. 5.17 apresenta o gráfico do logaritmo da norma l_∞ em função do número de iterações para o Problema B. O Problema B foi utilizado como exemplo por apresentar o maior número de iterações para se atingir o critério de convergência. A Fig. 5.17(a) mostra o comportamento da solução para a malha $N = 1.024$ e a Fig. 5.17(b) para a malha $N = 1.048.576$. Observa-se que o comportamento da solução é praticamente o mesmo, independentemente do esquema de cálculo adotado para o cálculo da condutividade térmica.

Tabela 5.17: Número de iterações utilizadas na solução dos problemas

	Problema A	Problema B	Problema C	Problema D	Problema E
Iterações	12	75	1	12	21

(a) Malha $N = 1.024$ volumes(b) Malha $N = 1.048.576$ volumes**Figura 5.17:** Resíduo entre duas iterações consecutivas para o Problema B

A Tab. 5.18 apresenta a razão entre o uso de memória *cache* de cada um dos esquemas em relação ao esquema com menor uso de memória em cada um dos problemas, para as malhas com $N = 1.024$ e $N = 1.048.576$. Em todas as análises, o esquema que utilizou menos memória é o MAk. A comparação entre os esquemas é feita com base no parâmetro R_2 , sendo

$$R_2 = \frac{RAM_n}{RAM_{MAk}} \quad (5.5)$$

onde RAM_n é a memória computacional consumida para o cálculo de k do esquema que está sendo avaliado e RAM_{MAk} é a memória computacional consumida para o esquema MAk que esta sendo utilizado como referência.

Tabela 5.18: Razão entre usos de memória *cache*

malha	memória (kB)	----- R_2 -----											
N	problema	MAk	MHk	MAT	LTMH	TkMH	KG2P	KG3P	Lk2M	KG4P	KG6P	DK1D	AD1D
1.024	A	2.864	1,006	1,004	1,006	1,006	1,011	1,010	1,004	1,013	1,013	1,007	-
	B	2.876	1,001	1,001	1,003	1,003	1,010	1,014	1,007	1,015	1,017	1,007	-
	C	2.816	1,001	1,000	1,001	1,001	1,001	1,001	1,001	1,003	1,000	1,001	-
	D	2.860	1,001	1,001	1,003	1,003	1,006	1,006	1,001	1,011	1,013	1,004	-
	E	2.828	1,001	1,000	1,000	1,000	1,007	1,006	1,000	1,008	1,008	1,003	0,999
1.048.576	A	183.280	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	-
	B	183.300	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	-
	C	183.208	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	-
	D	183.276	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	-
	E	183.248	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Para saber o valor de memória *cache* em cada análise, basta multiplicar o valor da memória *cache* de referência (em kB), dado pelo esquema MAk, pela razão entre usos de memória encontrados na Tab. 5.18. Pode-se observar nesta tabela que o uso de memória é aproximadamente o mesmo para todos os esquemas avaliados, tendendo a se igualar para as malhas com maior número de volumes.

Nas próximas seções são apresentados o detalhamento do custo computacional para cada um dos problemas analisados.

5.2.1 Problemas A e B

A Fig. 5.18 apresenta as curvas referentes ao tempo de CPU (em segundos) gasto na solução do Problema A para cinco dos esquemas de cálculo de k avaliados.

Pode-se escrever o tempo gasto de CPU (T_{cpu}) em função de N , assim, $T_{cpu} = aN^b$, no qual, para um gráfico logarítmico, “ b ” representa a inclinação de cada curva na Fig. 5.18 e “ a ” é o parâmetro que determina o valor da ordenada a partir da qual a reta cruza o eixo T_{cpu} . A Tab.

5.19 apresenta os valores dos parâmetros a e b das curvas para cada um dos esquemas de cálculo de k .

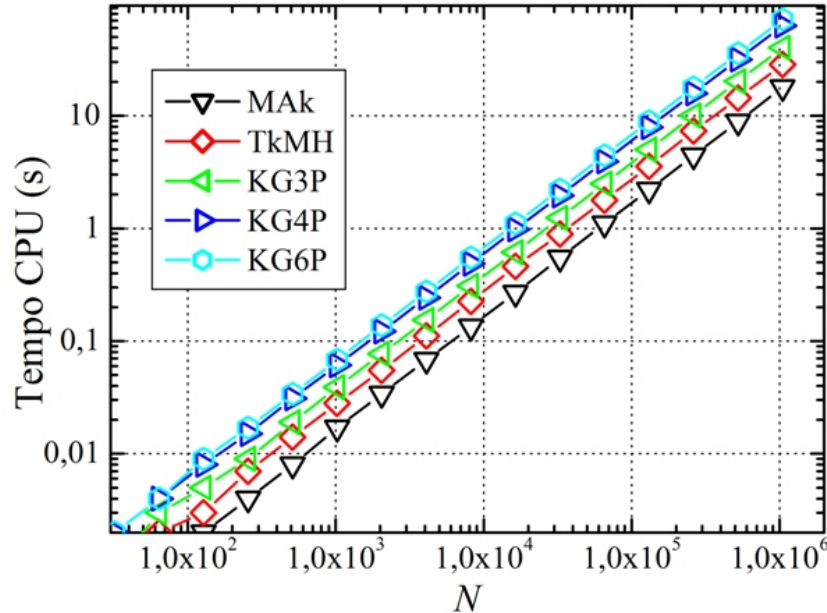


Figura 5.18: Tempo de CPU para o Problema A

A Tab. 5.19 deixa claro que o MAk é o esquema que utiliza menor tempo de CPU e que todas as curvas do logaritmo do tempo de CPU *versus* N são aproximadamente paralelas com coeficientes angulares próximos de um.

Tabela 5.19: Parâmetros a e b das curvas dos tempos de CPU em função de N para o Problema A

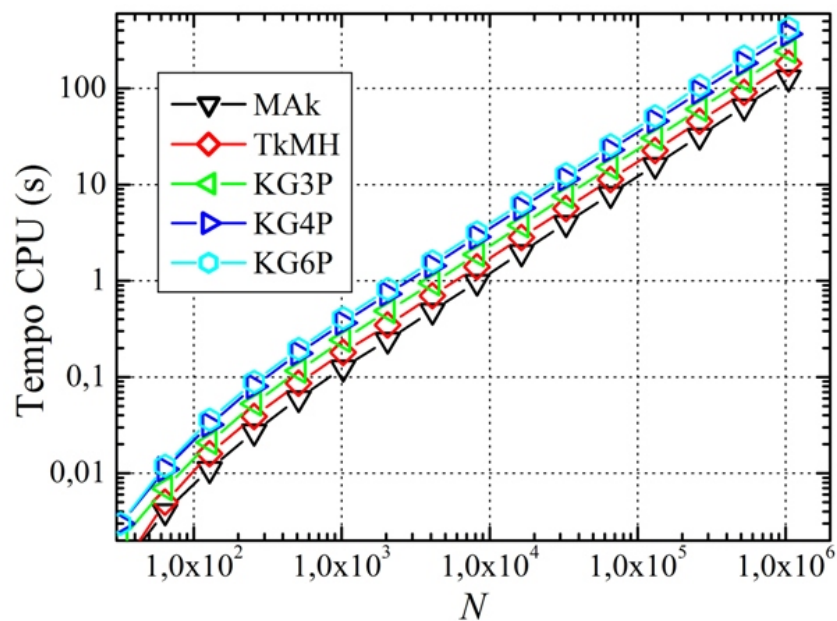
parâmetro	MAk	MHk	MAT	LTMH	TkMH	KG2P	KG3P	Lk2M	KG4P	KG6P	DK1D
a	$1,59 \cdot 10^{-5}$	$1,66 \cdot 10^{-5}$	$1,86 \cdot 10^{-5}$	$2,38 \cdot 10^{-5}$	$2,67 \cdot 10^{-5}$	$3,26 \cdot 10^{-5}$	$3,73 \cdot 10^{-5}$	$2,73 \cdot 10^{-5}$	$5,94 \cdot 10^{-5}$	$6,58 \cdot 10^{-5}$	$2,06 \cdot 10^{-5}$
b	1,00493	1,00523	0,99993	1,00406	1,00156	1,00282	1,00191	1,00282	1,00068	1,00234	1,00176

A Tab. 5.20 apresenta o tempo de CPU para o esquema MAk e a razão R_1 para os demais esquemas de cálculo de k avaliados no Problema A. O esquema que utilizou menos tempo de CPU é o MAk e foi utilizado como tempo de referência. O KG6P é o esquema que utilizou mais tempo de CPU.

Tabela 5.20: Comparação entre os tempos de CPU para o Problema A

malha	T_{cpu} (s)	----- R_1 -----									
N	MAk	MHk	MAT	LTMH	TkMH	KG2P	KG3P	Lk2M	KG4P	KG6P	DK1D
2	0,000	2,000	2,000	1,000	2,000	1,667	1,667	1,667	2,000	2,000	1,000
4	0,000	1,333	1,333	1,500	1,500	2,000	2,333	1,833	3,167	3,667	1,000
8	0,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
16	0,000	1,000	1,000	1,000	1,516	2,000	2,000	1,516	3,032	2,516	1,000
32	0,000	1,000	1,319	2,000	1,660	2,000	2,319	2,000	3,979	4,638	1,319
64	0,001	1,000	1,147	1,431	1,578	2,000	2,294	1,578	3,294	3,862	1,284
128	0,002	1,000	1,073	1,647	1,573	1,931	2,147	1,647	3,651	4,009	1,216
256	0,004	1,038	1,074	1,482	1,705	2,000	2,223	1,705	3,632	4,114	1,259
512	0,008	1,056	1,131	1,482	1,648	2,038	2,297	1,686	3,632	4,095	1,260
1.024	0,017	1,046	1,129	1,491	1,639	2,018	2,296	1,694	3,629	4,064	1,268
2.048	0,034	1,055	1,111	1,491	1,634	2,018	2,282	1,690	3,611	4,083	1,250
4.096	0,068	1,023	1,069	1,483	1,632	1,977	2,264	1,667	3,575	4,046	1,253
8.192	0,134	1,058	1,128	1,477	1,674	2,035	2,302	1,692	3,622	4,105	1,267
16.384	0,267	1,070	1,123	1,515	1,719	2,058	2,304	1,713	3,673	4,135	1,281
32.768	0,547	1,063	1,121	1,482	1,632	2,011	2,274	1,676	3,581	4,043	1,254
65.536	1,100	1,070	1,118	1,494	1,614	2,006	2,262	1,671	3,574	4,033	1,251
131.072	2,204	1,064	1,105	1,490	1,617	2,004	2,267	1,672	3,582	4,040	1,253
262.144	4,424	1,060	1,104	1,492	1,653	1,998	2,274	1,676	3,573	4,025	1,252
524.288	8,830	1,064	1,108	1,518	1,624	2,013	2,284	1,690	3,566	4,043	1,258
1.048.576	17,854	1,048	1,091	1,482	1,601	1,989	2,249	1,670	3,524	3,992	1,241

A análise do tempo de CPU (em segundos) para o Problema B segue a mesma definição de parâmetros utilizados para o Problema A. Assim, a Fig. 5.19 mostra as curvas representativas de apenas cinco dos esquemas de cálculo de k avaliados.

**Figura 5.19:** Tempo de CPU para o Problema B

A Tab. 5.21 apresenta os resultados de tempo de CPU para todos os esquemas avaliados para o Problema B. Conclui-se que, igualmente ao Problema A, para o Problema B, o esquema com menor tempo de CPU é o MAk e com maior tempo o KG6P.

Tabela 5.21: Comparação entre os tempos de CPU para o Problema B

malha	T_{cpu} (s)	----- R_1 -----									
N	MAk	MHk	MAT	LTMH	TkMH	KG2P	KG3P	Lk2M	KG4P	KG6P	DK1D
2	0,000	1,000	0,400	0,600	1,000	1,000	1,000	0,600	1,600	1,200	0,600
4	0,000	1,200	1,200	1,600	1,600	1,600	2,200	1,600	2,800	3,200	1,200
8	0,000	1,000	1,000	1,000	1,938	1,000	1,938	1,938	2,938	2,938	1,000
16	0,000	1,000	1,516	1,516	1,516	2,000	2,516	2,000	3,032	3,516	1,000
32	0,001	1,000	1,000	1,284	1,284	1,716	1,862	1,431	2,716	3,009	1,000
64	0,004	1,086	1,086	1,348	1,435	1,783	1,911	1,476	2,955	3,259	1,086
128	0,011	1,043	1,071	1,329	1,457	1,743	1,957	1,485	2,957	3,300	1,071
256	0,027	1,057	1,074	1,377	1,440	1,789	1,932	1,468	2,932	3,257	1,092
512	0,060	1,029	1,065	1,335	1,443	1,783	1,950	1,503	2,966	3,296	1,094
1.024	0,125	1,031	1,054	1,336	1,440	1,760	1,954	1,488	2,943	3,275	1,092
2.048	0,244	1,066	1,084	1,362	1,425	1,794	1,984	1,520	3,001	3,347	1,115
4.096	0,487	1,045	1,058	1,333	1,436	1,756	1,939	1,486	2,944	3,277	1,088
8.192	0,976	1,038	1,047	1,329	1,432	1,751	1,930	1,482	2,935	3,273	1,092
16.384	1,972	1,039	1,047	1,322	1,427	1,744	1,915	1,478	2,906	3,247	1,094
32.768	3,966	1,045	1,045	1,322	1,424	1,742	1,918	1,473	2,892	3,229	1,091
65.536	7,934	1,046	1,046	1,329	1,426	1,739	1,918	1,476	2,893	3,242	1,100
131.072	15,950	1,045	1,046	1,320	1,421	1,734	1,915	1,474	2,884	3,231	1,093
262.144	32,183	1,042	1,038	1,311	1,415	1,718	1,890	1,463	2,854	3,301	1,092
524.288	64,436	1,042	1,038	1,311	1,416	1,716	1,891	1,469	2,858	3,322	1,092
1.048.576	129,028	1,040	1,038	1,309	1,410	1,714	1,892	1,466	2,852	3,277	1,092

Para um gráfico logarítmico de T_{cpu} versus N , pode-se escrever que $T_{cpu} = aN^b$, no qual, “ b ” representa a inclinação de cada curva na Fig. 5.19 e “ a ” é o parâmetro que determina o valor da ordenada a partir da qual a reta cruza o eixo T_{cpu} . A Tab. 5.22 apresenta os valores dos parâmetros a e b das curvas para cada um dos esquemas de cálculo de k .

Tabela 5.22: Parâmetros a e b das curvas dos tempos de CPU em função de N para o Problema B

parâmetro	MAk	MHk	MAT	LTMH	TkMH	KG2P	KG3P	Lk2M	KG4P	KG6P	DK1D
a	$1,21 \cdot 10^{-4}$	$1,23 \cdot 10^{-4}$	$1,29 \cdot 10^{-4}$	$1,65 \cdot 10^{-4}$	$1,78 \cdot 10^{-4}$	$2,18 \cdot 10^{-4}$	$2,43 \cdot 10^{-4}$	$1,82 \cdot 10^{-4}$	$3,67 \cdot 10^{-4}$	$3,95 \cdot 10^{-4}$	$1,32 \cdot 10^{-4}$
b	1,00139	1,00265	0,99920	0,99844	0,99831	0,99757	0,99679	0,99925	0,99685	1,00148	1,00133

Observa-se da Tab. 5.22 que a inclinação das curvas, parâmetro b , é aproximadamente um. Os valores dos parâmetros a e b nas Tabs. 5.19 e 5.22 são obtidos para retas do gráfico logarítmico de T_{cpu} versus N para malhas com volumes $N = 1.024$ e $N = 1.048.576$.

5.2.2 Problemas C e D com mudança de material em uma face

O Problema C, diferentemente dos demais, tem a condutividade térmica definida independentemente da temperatura. Assim, o tempo de CPU utilizado na solução é menor. Para caracterizar o tempo de CPU (em segundos) gasto na solução do Problema C, a Fig. 5.20 mostra as curvas de apenas quatro dos esquemas avaliados.

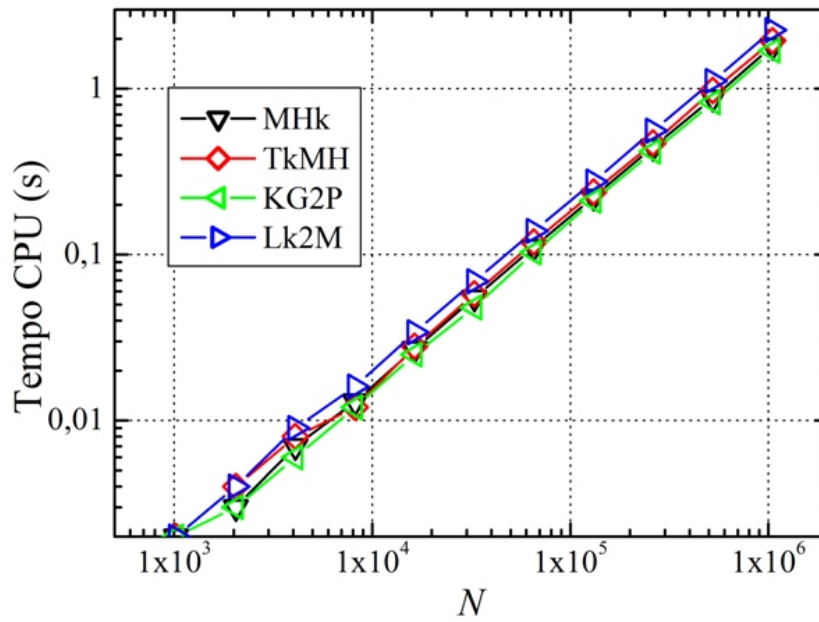


Figura 5.20: Tempo de CPU para o Problema C

Para um gráfico logarítmico do tempo de CPU (T_{cpu}) *versus* N , como o mostrado na Fig. 5.20, pode-se escrever que $T_{cpu} = aN^b$, no qual “ b ” representa a inclinação de cada curva e “ a ” é o parâmetro que determina o valor da ordenada a partir da qual a reta cruza o eixo T_{cpu} . A Tab. 5.23 apresenta os valores dos parâmetros a e b das curvas para cada um dos esquemas de cálculo de k .

Tabela 5.23: Parâmetros a e b das curvas dos tempos de CPU em função de N para o Problema C

parâmetro	MAk	MHk	MAT	LTMH	TkMH	KG2P	KG3P	Lk2M	KG4P	KG6P	DK1D
a	$1,33 \cdot 10^{-6}$	$1,44 \cdot 10^{-6}$	$1,37 \cdot 10^{-6}$	$1,54 \cdot 10^{-6}$	$1,06 \cdot 10^{-6}$	$1,37 \cdot 10^{-6}$	$1,61 \cdot 10^{-6}$	$1,75 \cdot 10^{-6}$	$1,60 \cdot 10^{-6}$	$2,05 \cdot 10^{-6}$	$1,44 \cdot 10^{-6}$
b	1,01476	1,01321	1,01193	1,01182	1,04028	1,01193	1,00038	1,01493	1,00755	0,99179	1,01321

Os parâmetros a e b foram calculados para as malhas com volumes $N = 8.192$ e $N = 1.048.576$. Estas duas malhas representam para cada um dos esquemas uma reta aproximada

do comportamento do $\log(T_{cpu})$. Observa-se que para todos os esquemas essas retas possuem inclinações muito próximas do valor um.

O tempo de CPU gasto na solução do Problema C para todos os esquemas é mostrado na Tab. 5.24. Observa-se que a diferença entre os esquemas é muito pequena, com destaque para os esquemas MAT e KG2P que tiveram melhor resultado, ou seja, menor tempo na solução. O MAT foi utilizado como tempo de CPU referência na comparação com os demais esquemas. No caso específico do Problema C, o MAT utiliza menor tempo computacional porque os valores da condutividade térmica são conhecidos nas faces dos VC's, portanto não exige cálculos para essa determinação.

Tabela 5.24: Comparação entre os tempos de CPU para o Problema C

malha	T_{cpu} (s)	----- R_1 -----									
N	MAT	MAk	MHk	LTMH	TkMH	KG2P	KG3P	Lk2M	KG4P	KG6P	DK1D
2	0,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
4	0,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
8	0,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
16	0,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
32	0,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
64	0,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
128	0,000	1,938	1,000	1,938	1,938	1,000	1,000	1,938	1,938	1,000	1,000
256	0,000	1,000	1,000	1,319	1,000	0,660	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
512	0,001	1,000	1,000	1,205	1,205	1,000	1,205	1,603	1,000	1,205	1,000
1.024	0,002	1,000	1,103	1,199	1,103	1,000	1,000	1,500	1,199	1,199	1,103
2.048	0,003	1,054	1,159	1,213	1,213	1,054	1,054	1,476	1,213	1,264	1,159
4.096	0,006	1,125	1,125	1,000	1,250	1,000	1,000	1,500	1,125	1,250	1,125
8.192	0,012	1,000	1,063	1,125	1,000	1,000	1,063	1,313	1,125	1,250	1,063
16.384	0,025	1,000	1,063	1,188	1,125	1,000	1,000	1,375	1,188	1,063	1,063
32.768	0,051	1,015	1,077	1,154	1,138	0,954	1,000	1,354	1,138	1,138	1,077
65.536	0,105	1,000	1,060	1,119	1,134	0,985	0,985	1,328	1,119	1,134	1,060
131.072	0,207	1,008	1,075	1,143	1,150	1,015	0,985	1,323	1,120	1,135	1,075
262.144	0,418	1,022	1,067	1,142	1,127	1,000	1,000	1,336	1,112	1,119	1,067
524.288	0,850	1,000	1,037	1,138	1,147	0,972	0,991	1,312	1,083	1,119	1,037
1.048.576	1,693	1,014	1,069	1,124	1,147	1,000	1,005	1,332	1,101	1,134	1,069

No Problema D, o esquema MAk apresentou o menor tempo computacional. A Fig. 5.21 exhibe as curvas referentes ao custo computacional de quatro dos esquemas avaliados no problema.

A Tab. 5.25 apresenta o tempo de CPU gasto para todos os esquemas avaliados. Observa-se que o esquema MAk utiliza menor tempo de CPU em comparação com os demais esquemas, e este é o esquema de referência para a comparação. Na mesma análise, verifica-se que o esquema KG6P utiliza o maior tempo de CPU na comparação.

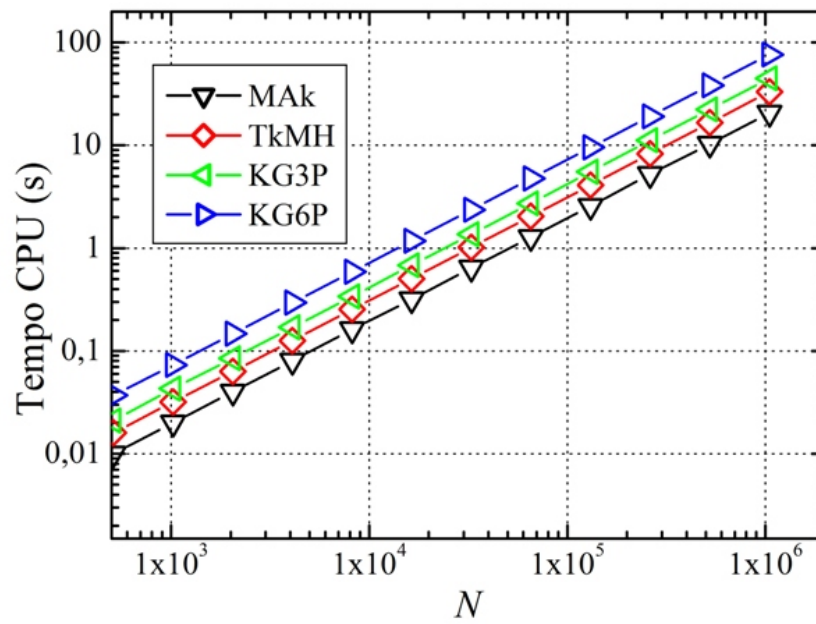


Figura 5.21: Tempo de CPU para o Problema D

Tabela 5.25: Comparação entre os tempos de CPU para o Problema D

malha	T_{cpu} (s)	----- R_1 -----									
N	MAk	MHk	MAT	LTMH	TkMH	KG2P	KG3P	Lk2M	KG4P	KG6P	DK1D
2	0,000	1,600	0,600	1,600	1,200	0,600	1,000	1,600	3,200	3,200	1,200
4	0,000	0,667	0,889	1,222	1,222	1,333	1,333	1,333	2,556	2,778	1,000
8	0,000	1,000	1,000	1,938	1,000	1,938	1,938	1,938	2,938	3,875	1,938
16	0,000	1,516	1,516	1,516	1,516	2,000	2,000	2,000	3,516	3,516	1,516
32	0,001	1,000	1,258	1,516	1,758	2,016	2,016	1,758	3,274	3,774	1,258
64	0,001	1,120	1,120	1,496	1,624	1,872	2,248	1,744	3,248	3,744	1,248
128	0,003	1,060	1,124	1,496	1,624	1,936	2,248	1,624	3,308	3,744	1,248
256	0,005	1,000	1,161	1,483	1,645	1,967	2,223	1,740	3,351	3,804	1,225
512	0,010	1,032	1,063	1,476	1,603	1,936	2,174	1,683	3,301	3,777	1,253
1.024	0,020	1,039	1,126	1,481	1,606	1,890	2,150	1,654	3,276	3,701	1,229
2.048	0,040	1,039	1,110	1,467	1,576	1,906	2,137	1,631	3,251	3,686	1,200
4.096	0,080	1,059	1,118	1,471	1,588	1,912	2,137	1,647	3,245	3,706	1,167
8.192	0,162	1,014	1,091	1,447	1,563	1,851	2,091	1,606	3,197	3,630	1,168
16.384	0,317	1,044	1,128	1,473	1,596	1,911	2,153	1,640	3,276	3,719	1,197
32.768	0,643	1,034	1,113	1,466	1,585	1,888	2,121	1,637	3,226	3,669	1,212
65.536	1,276	1,056	1,121	1,479	1,595	1,903	2,138	1,652	3,270	3,724	1,241
131.072	2,566	1,044	1,125	1,477	1,596	1,905	2,155	1,644	3,269	3,718	1,257
262.144	5,235	1,027	1,105	1,458	1,579	1,889	2,141	1,616	3,206	3,644	1,222
524.288	10,335	1,044	1,141	1,490	1,608	1,921	2,164	1,639	3,249	3,703	1,233
1.048.576	20,623	1,043	1,152	1,494	1,609	1,917	2,173	1,660	3,239	3,705	1,248

A inclinação das curvas do tempo de CPU *versus* N em um gráfico logarítmico, como no exemplo da Fig. 5.21, pode ser obtido pela função $T_{cpu} = aN^b$, onde os parâmetros “ a ” e “ b ” são apresentados na Tab. 5.26. Esses parâmetros são obtidos considerando a reta definida pelos

resultados das malhas $N = 1024$ e $N = 1.048.576$ no gráfico do $\log(T_{cpu})$.

Tabela 5.26: Parâmetros a e b das curvas dos tempos de CPU em função de N para o Problema D

parâmetro	MAk	MHk	MAT	LTMH	TkMH	KG2P	KG3P	Lk2M	KG4P	KG6P	DK1D
a	$1,90 \cdot 10^{-5}$	$1,97 \cdot 10^{-5}$	$2,09 \cdot 10^{-5}$	$2,79 \cdot 10^{-5}$	$3,05 \cdot 10^{-5}$	$3,55 \cdot 10^{-5}$	$4,05 \cdot 10^{-5}$	$3,13 \cdot 10^{-5}$	$6,30 \cdot 10^{-5}$	$7,04 \cdot 10^{-5}$	$2,30 \cdot 10^{-5}$
b	1,00238	1,00295	1,00570	1,00372	1,00259	1,00442	1,00394	1,00296	1,00076	1,00252	1,00469

5.2.3 Problema E

A Fig. 5.22 mostra as curvas do tempo de CPU (em segundos) *versus* N para o Problema E. Nesta figura são apresentados quatro dos esquemas de cálculo de k avaliados.

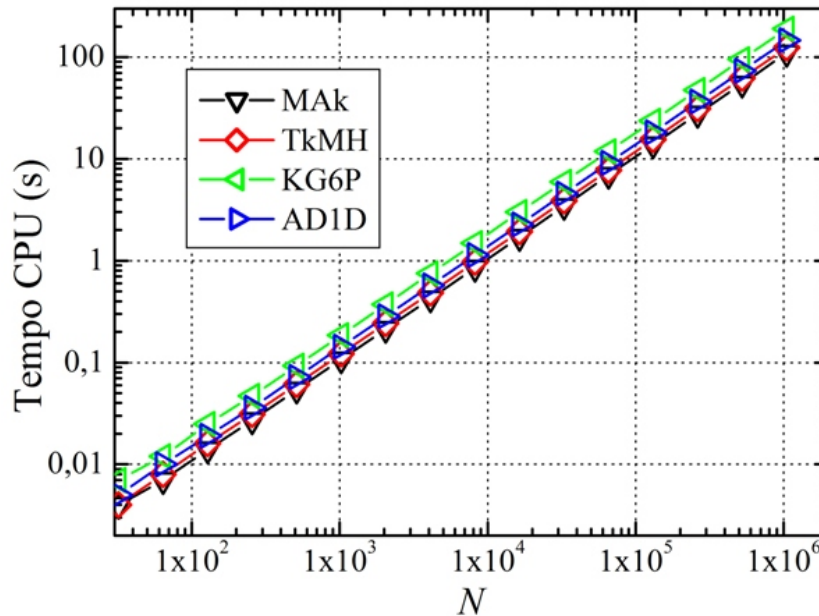


Figura 5.22: Tempo de CPU para o Problema E

A inclinação das curvas do tempo de CPU *versus* N em um gráfico logarítmico, como no exemplo da Fig. 5.22, pode ser obtido pela função $T_{cpu} = aN^b$, onde os parâmetros a e b são apresentados na Tab. 5.27. Esses parâmetros são obtidos considerando a reta definida pelos resultados das malhas $N = 1024$ e $N = 1.048.576$ no gráfico do $\log(T_{cpu})$.

Tabela 5.27: Parâmetros a e b das curvas dos tempos de CPU em função de N para o Problema E

parâmetro	MAk	MHk	MAT	LTMH	TkMH	KG2P	KG3P	Lk2M	KG4P	KG6P	DK1D	AD1D
a	$1,04 \cdot 10^{-4}$	$1,04 \cdot 10^{-4}$	$1,06 \cdot 10^{-4}$	$1,15 \cdot 10^{-4}$	$1,19 \cdot 10^{-4}$	$1,30 \cdot 10^{-4}$	$1,37 \cdot 10^{-4}$	$1,20 \cdot 10^{-4}$	$1,71 \cdot 10^{-4}$	$1,82 \cdot 10^{-4}$	$1,13 \cdot 10^{-4}$	$1,40 \cdot 10^{-4}$
b	1,00088	1,00228	1,00005	1,00007	0,99978	1,00001	0,99944	1,00025	0,99991	0,99931	1,00138	0,99990

O esquema MAk é o que possui menor tempo de CPU na solução. Esta situação pode ser notada na Tab. 5.28, onde estão expressos os tempos de CPU de todos os esquemas. O MAk foi utilizado como tempo de CPU de referência.

Tabela 5.28: Comparação entre os tempos de CPU para o Problema E

malha	T_{cpu} (s)	----- R_1 -----										
N	MAk	MHk	MAT	LTMH	TkMH	KG2P	KG3P	Lk2M	KG4P	KG6P	DK1D	AD1D
2	0,000	1,750	1,188	1,188	1,000	1,188	1,188	1,000	1,563	1,375	1,063	1,375
4	0,000	1,865	0,730	1,108	1,486	1,000	1,108	1,000	1,297	1,351	0,892	0,919
8	0,000	82,979	4,979	2,319	2,000	2,660	2,660	3,319	3,660	3,660	2,319	3,319
16	0,002	41,797	2,171	45,551	1,000	1,668	1,834	2,000	2,337	2,417	1,417	2,086
32	0,004	42,211	1,168	1,460	1,126	1,294	1,417	1,294	1,794	1,877	1,209	1,460
64	0,007	1,199	1,067	1,178	1,155	1,266	1,311	1,155	1,667	1,755	1,088	1,356
128	0,014	1,022	1,011	1,110	1,142	1,242	1,296	1,154	1,637	1,746	1,077	1,340
256	0,027	1,058	1,017	1,156	1,133	1,243	1,300	1,156	1,636	1,740	1,087	1,335
512	0,054	1,006	1,015	1,102	1,140	1,244	1,305	1,154	1,637	1,739	1,087	1,337
1.024	0,107	1,013	1,016	1,101	1,137	1,242	1,308	1,152	1,634	1,740	1,095	1,339
2.048	0,213	1,014	1,012	1,105	1,136	1,243	1,306	1,151	1,635	1,749	1,075	1,336
4.096	0,425	1,013	1,015	1,103	1,136	1,248	1,306	1,154	1,642	1,769	1,077	1,339
8.192	0,850	1,016	1,013	1,107	1,139	1,245	1,304	1,154	1,637	1,749	1,039	1,335
16.384	1,704	1,016	1,013	1,103	1,137	1,244	1,301	1,156	1,641	1,769	1,075	1,334
32.768	3,435	1,010	1,015	1,101	1,127	1,238	1,294	1,146	1,627	1,738	1,076	1,328
65.536	6,933	1,012	1,011	1,085	1,117	1,224	1,280	1,133	1,610	1,707	1,065	1,315
131.072	13,864	1,015	1,014	1,088	1,122	1,227	1,284	1,136	1,614	1,707	1,045	1,315
262.144	27,690	1,019	1,016	1,089	1,124	1,229	1,283	1,141	1,616	1,711	1,035	1,322
524.288	54,663	1,032	1,030	1,105	1,137	1,244	1,300	1,155	1,637	1,738	1,094	1,340
1.048.576	110,098	1,023	1,010	1,095	1,129	1,235	1,295	1,147	1,623	1,721	1,099	1,330

5.3 MUDANÇA DE MEIO EM UM NÓ

Nesta seção serão analisados os resultados dos esquemas de cálculo de k na face do VC quando existe uma mudança abrupta da condutividade térmica em um nó. A Fig. 5.23 apresenta duas malhas diferentes para um mesmo problema que tem dois materiais, sendo a mudança de material no meio do domínio de cálculo. A Fig. 5.23(a) apresenta uma malha com quatro volumes reais e, conseqüentemente, a mudança ocorre na face do VC, sendo as análises para esta condição realizadas na seção 5.1. Já, na Fig. 5.23(b) existem cinco volumes, assim, a mudança de material é no nó e não na face do VC, e esta condição é estudada nesta seção.

Os resultados da avaliação de desempenho dos esquemas de cálculo de k serão apresentados para os Problemas C e D. Nestes problemas a mudança na condutividade térmica ocorre no centro do domínio, conforme a Tab. 4.1.

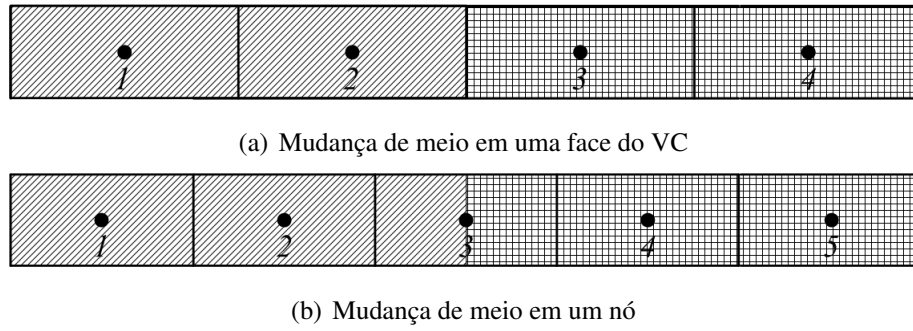


Figura 5.23: Detalhes na geração da malha

5.3.1 Resultados para o Problema C

Os resultados para o erro de discretização do Problema C se dividem em dois grupos distintos. O primeiro deles é composto por esquemas que não apresentam erros de discretização e o segundo grupo por esquemas com erros de discretização. Os esquemas com erros de discretização são o MAK e o MHK. Nesta análise a razão de refino da malha é igual a três.

Dos dois esquemas que possuem erro de discretização, o MAK é o que apresenta os maiores valores e o MHK os menores. A Fig. 5.24 mostra o comportamento desses dois esquemas em relação aos erros de discretização. Os demais esquemas não apresentam erros de discretização, sendo apenas erros de arredondamento.

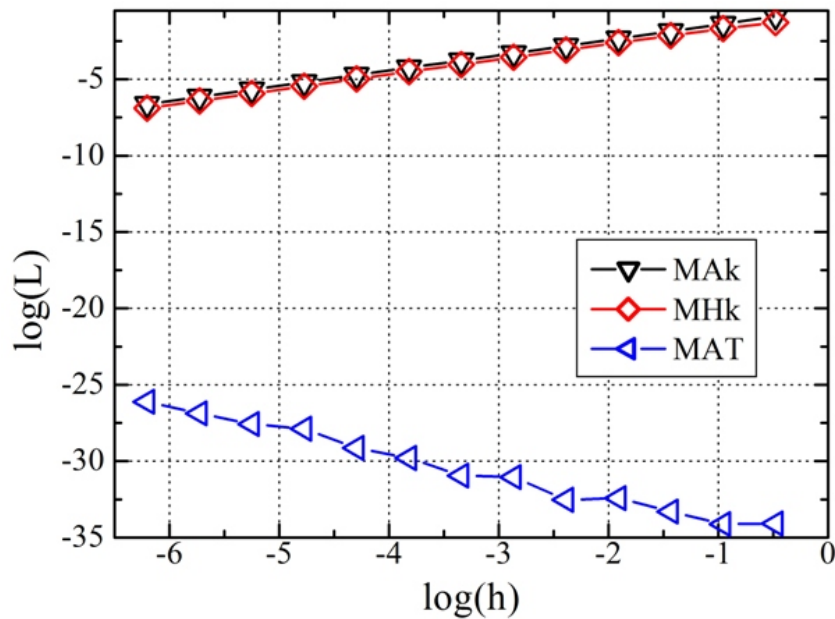


Figura 5.24: Média da norma l_1 dos erros verdadeiros (E) para o Problema C com mudança do material no nó

A Tab. 5.29 apresenta os valores do logaritmo da média da norma l_1 do erro de discretização ($\log(L)$) para todos os esquemas analisados. Pode-se observar que os esquemas MAT, LTMH, TkMH, Lk2M, KG4P e KG6P possuem apenas erros de arredondamento e, sendo esses valores, iguais. Na tabela podem ser observados resultados comparativos entre cada um dos esquemas e o número de volumes (N) utilizados nas análises. A comparação é feita com base no esquema que apresenta o melhor resultado, ou seja, aquele que possui menor erro de discretização. No caso, dentre os esquemas com menor erro de discretização foi escolhido o MAT, sendo seus valores absolutos listados na tabela. A comparação entre os esquemas é feita com base no parâmetro R , Eq. (5.1).

Tabela 5.29: Comparação entre os esquemas de cálculo da condutividade térmica para o Problema C com mudança do material no nó

malha	referência (L_1)	----- R -----									
N	MAT	MAk	MHk	LTMH	TkMH	KG2P	KG3P	Lk2M	KG4P	KG6P	DK1D
3	8,0247 10^{-35}	1,7333 10^{33}	6,6084 10^{32}	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	6,6084 10^{32}
9	7,6235 10^{-35}	5,3932 10^{32}	2,7236 10^{32}	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	2,7236 10^{32}
27	4,9976 10^{-34}	2,7441 10^{31}	1,4706 10^{31}	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,4706 10^{31}
81	3,7863 10^{-33}	1,2105 10^{30}	6,6024 10^{29}	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	6,6024 10^{29}
243	2,9413 10^{-33}	5,2003 10^{29}	2,8522 10^{29}	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	2,8522 10^{29}
729	8,9464 10^{-32}	5,7012 10^{27}	3,1328 10^{27}	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	3,1328 10^{27}
2.187	1,1186 10^{-31}	1,5201 10^{27}	8,3581 10^{26}	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	8,3581 10^{26}
6.561	1,5962 10^{-30}	3,5511 10^{25}	1,9529 10^{25}	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,9529 10^{25}
19.683	7,3166 10^{-30}	2,5824 10^{24}	1,4203 10^{24}	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,4203 10^{24}
59.049	1,3151 10^{-28}	4,7891 10^{22}	2,6340 10^{22}	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	2,6340 10^{22}
177.147	2,6610 10^{-28}	7,8896 10^{21}	4,3393 10^{21}	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	4,3393 10^{21}
531.441	1,3271 10^{-27}	5,2732 10^{20}	2,9003 10^{20}	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	2,9003 10^{20}
1.594.323	7,6302 10^{-27}	3,0571 10^{19}	1,6814 10^{19}	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,6814 10^{19}

A Tab. 5.30 apresenta a ordenação dos resultados do melhor para o pior esquema de cálculo de k na face do VC para o erro de discretização. Esta análise considera os resultados para todas as malhas a partir da qual é definido o intervalo convergente. Neste caso foram utilizadas as malhas com 81 volumes até 1.594.323 volumes.

Tabela 5.30: Ordenação por resultados do erro de discretização para o Problema C com mudança do material no nó

ordem de resultados	1	1	1	1	1	1	1	1	9	9	11
esquemas	MAT	LTMH	TkMH	KG2P	KG3P	Lk2M	KG4P	KG6P	DK1D	MHk	MAk

Conforme se pode ver na Fig. 5.25 e Tab. 5.31, para os esquemas MAk e MHk, a ordem efetiva do erro de discretização tende para a unidade quando $h \rightarrow 0$. Os demais esquemas não

apresentam erro de discretização, sendo assim, a ordem efetiva não foi calculada.

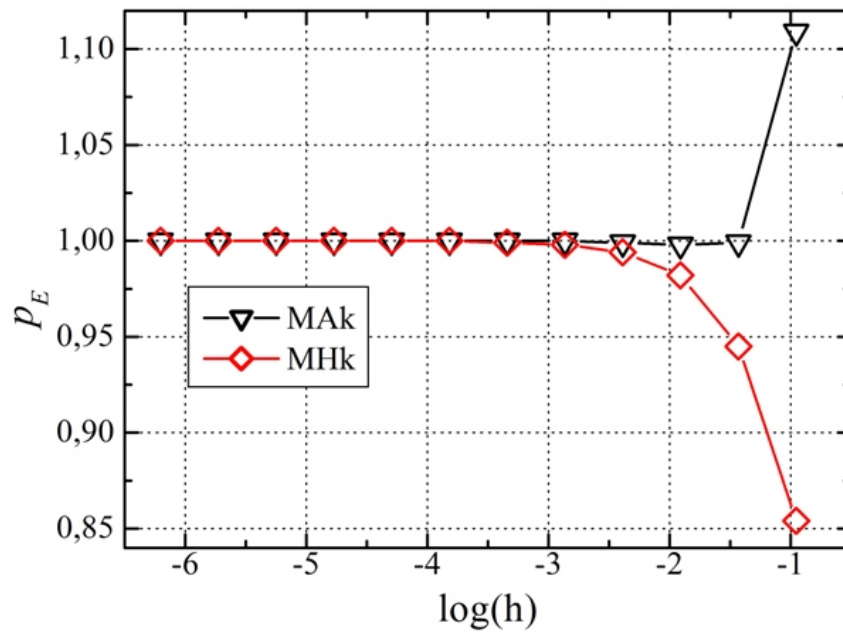


Figura 5.25: Ordem efetiva do erro de discretização para o Problema C com mudança do material no nó

Tabela 5.31: Ordem efetiva do erro de discretização para o Problema C com mudança do material no nó

malha	Ordem efetiva	
	MAk	MHk
9	1,109	0,854
27	0,999	0,945
81	0,998	0,982
243	0,999	0,994
729	1,000	0,998
2.187	1,000	0,999
6.561	1,000	1,000
19.683	1,000	1,000
59.049	1,000	1,000
177.147	1,000	1,000
531.441	1,000	1,000
1.594.323	1,000	1,000

5.3.2 Resultados para o Problema D

A análise realizada para o Problema D mostra que todos os esquemas possuem erros de discretização. O esquema com maior erro de discretização é o MHk e com menor o TkMH. A Fig. 5.26 apresenta as curvas do $\log(L)$ versus $\log(h)$ para quatro dos esquemas avaliados. A razão de refino de malha utilizada em todas as análises é igual a três.

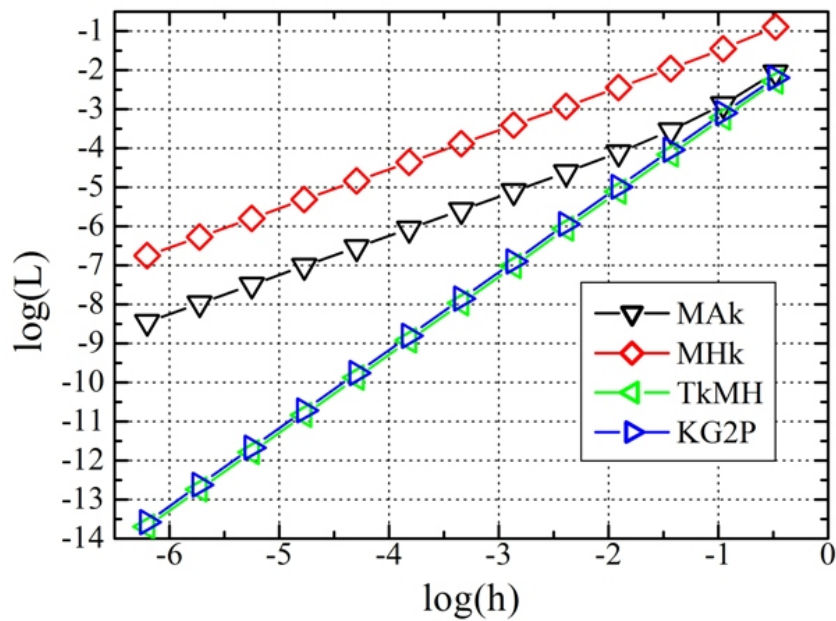


Figura 5.26: Média da norma l_1 dos erros verdadeiros (E) para o Problema D com mudança do material no nó

Tabela 5.32: Comparação entre os esquemas de cálculo da condutividade térmica para o Problema D com mudança do material no nó

malha	referência (L_1)	R									
N	TkMH	MAk	MHk	MAT	LTMH	KG2P	KG3P	Lk2M	KG4P	KG6P	DK1D
3	5,1093 10^{-03}	1,6968 10^{00}	2,4997 10^{01}	1,4567	1,6206	1,2404	1,2397	1,3088	1,2398	1,2397	1,2397
9	6,0230 10^{-04}	2,1918 10^{00}	5,8390 10^{01}	1,5937	1,7972	1,3248	1,3247	1,3955	1,3247	1,3247	1,3247
27	6,8672 10^{-05}	4,0946 10^{00}	1,5889 10^{02}	1,5824	1,7775	1,3225	1,3225	1,3879	1,3225	1,3225	1,3225
81	7,7277 10^{-06}	1,0009 10^{01}	4,5921 10^{02}	1,5657	1,7547	1,3138	1,3138	1,3768	1,3138	1,3138	1,3138
243	8,6273 10^{-07}	2,7839 10^{01}	1,3598 10^{03}	1,5586	1,7452	1,3099	1,3099	1,3721	1,3099	1,3099	1,3099
729	9,6017 10^{-08}	8,1335 10^{01}	4,0614 10^{03}	1,5561	1,7418	1,3086	1,3086	1,3705	1,3086	1,3086	1,3086
2.187	1,0674 10^{-08}	2,4183 10^{02}	1,2166 10^{04}	1,5553	1,7407	1,3081	1,3081	1,3699	1,3081	1,3081	1,3081
6.561	1,1863 10^{-09}	7,2330 10^{02}	3,6481 10^{04}	1,5550	1,7403	1,3079	1,3079	1,3697	1,3079	1,3079	1,3079
19.683	1,3182 10^{-10}	2,1677 10^{03}	1,0942 10^{05}	1,5549	1,7401	1,3079	1,3079	1,3696	1,3079	1,3079	1,3079
59.049	1,4647 10^{-11}	6,5010 10^{03}	3,2825 10^{05}	1,5549	1,7401	1,3079	1,3079	1,3697	1,3079	1,3079	1,3079
177.147	1,6274 10^{-12}	1,9501 10^{04}	9,8475 10^{05}	1,5548	1,7401	1,3078	1,3078	1,3696	1,3078	1,3078	1,3078
531.441	1,8082 10^{-13}	5,8500 10^{04}	2,9542 10^{06}	1,5548	1,7401	1,3078	1,3078	1,3696	1,3078	1,3078	1,3078
1.594.323	2,0092 10^{-14}	1,7550 10^{05}	8,8626 10^{06}	1,5548	1,7401	1,3078	1,3078	1,3696	1,3078	1,3078	1,3078

A Tab. 5.32 apresenta os valores com os erros de discretização para todos os esquemas analisados. Pode-se observar que o esquema MAT, projetado para esta condição (mudança da condutividade térmica no nó), não é o que apresenta o melhor resultado.

A Fig. 5.27 mostra a ordem efetiva de cinco dos esquemas analisados. Para os esquemas MAk e MHk a ordem efetiva do erro de discretização tende para a unidade quando $h \rightarrow 0$. Já, para os demais esquemas a ordem efetiva tende para dois quando $h \rightarrow 0$. Na Tab. 5.33

são apresentados os valores da ordem efetiva do erro de discretização para todos os esquemas avaliados.

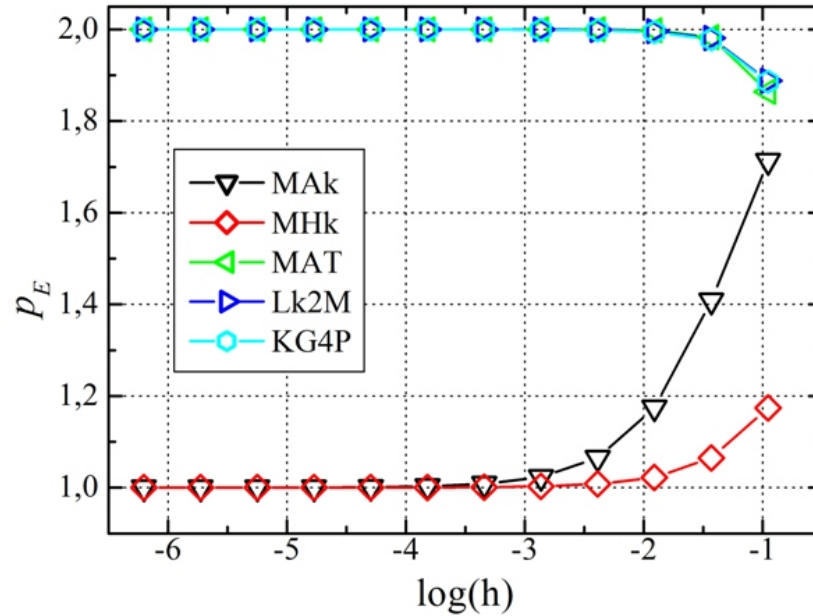


Figura 5.27: Ordem efetiva do erro de discretização para o Problema D com mudança do material no nó

Tabela 5.33: Ordem efetiva do erro de discretização para o Problema D com mudança do material no nó

malha		Ordem efetiva									
N	MAk	MHk	MAT	LTMH	TkMH	KG2P	KG3P	Lk2M	KG4P	KG6P	DK1D
9	1,713	1,174	1,864	1,852	1,946	1,886	1,886	1,888	1,886	1,886	1,886
27	1,408	1,065	1,983	1,987	1,976	1,978	1,978	1,981	1,978	1,978	1,978
81	1,175	1,022	1,998	2,000	1,988	1,994	1,994	1,996	1,994	1,994	1,994
243	1,065	1,008	2,000	2,001	1,996	1,998	1,998	1,999	1,998	1,998	1,998
729	1,023	1,003	2,000	2,000	1,999	1,999	1,999	2,000	1,999	1,999	1,999
2.187	1,008	1,001	2,000	2,000	1,999	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000
6.561	1,003	1,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000
19.683	1,001	1,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000
59.049	1,000	1,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000
177.147	1,000	1,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000
531.441	1,000	1,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000
1.594.323	1,000	1,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000

A Tab. 5.34 apresenta a lista com a ordenação do melhor para o pior resultado alcançado pelos esquemas de cálculo de k na face do VC em relação ao erro de discretização. Todas as malhas avaliadas pertencem ao intervalo convergente.

Tabela 5.34: Ordenação por resultados do erro de discretização para o Problema D com mudança do material no nó

ordem de resultados	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
esquemas	TkMH	DK1D	KG6P	KG3P	KG4P	KG2P	Lk2M	MAT	LTMH	MAk	MHk

5.4 ESQUEMA HÍBRIDO

Nesta seção são apresentados os resultados da proposição de um esquema híbrido para o cálculo da condutividade térmica do Problema D. A idéia básica do esquema Híbrido é a combinação dos esquemas MAk e MHk.

Define-se o esquema Híbrido, considerando a posição espacial $x = 0,5$, onde ocorre a mudança brusca de condutividade no Problema D, como coincidente com a interface entre dois volumes de controle², calcula-se, então, k_e de todas as faces fora desta posição pelo esquema MAk. Para a face coincidente com a mudança brusca de condutividade térmica, k_e é calculada pelo esquema MHk.

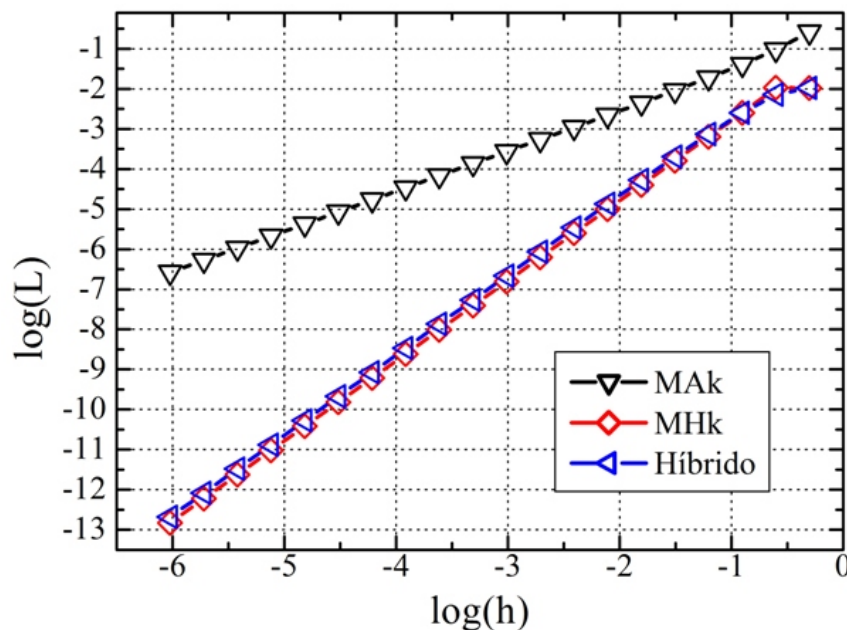


Figura 5.28: Média da norma l_1 dos erros verdadeiros (E) para o Problema D - análise suplementar

A Fig. 5.28 apresenta as curvas do $\log(L)$ versus $\log(h)$ para os esquemas MAk, MHk e Híbrido, sendo que a razão de refino de malha é igual a dois. Pode-se observar na figura que o esquema MHk tem os melhores resultados.

²pela forma como as malhas são geradas neste trabalho, isto é obtido com um número par de volumes na malha.

A Fig. 5.29 apresenta a ordem efetiva do erro de discretização para os esquemas MAk, MHk e o Híbrido. Nessa figura é possível observar que os esquemas MHk e o Híbrido têm ordem efetiva tendendo para dois quando $h \rightarrow 0$, e o MAk, conforme foi mostrado em análise anterior, tem ordem efetiva tendendo à unidade.

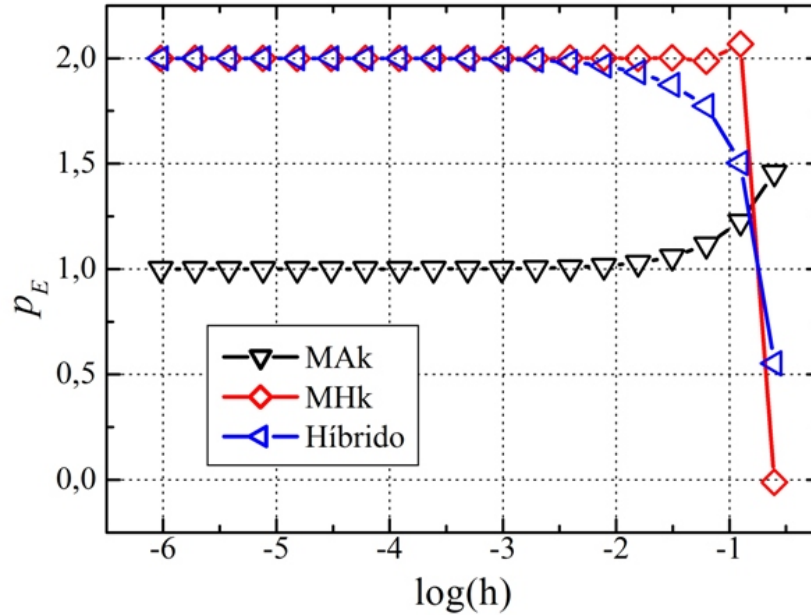


Figura 5.29: Ordem efetiva do erro de discretização para o Problema D - análise suplementar

A Tab. 5.35 apresenta os valores da média da norma l_1 do erro de discretização para o MHk. Nessa tabela, também, é feita a comparação com base no parâmetro R , Eq. (5.1), entre os esquemas MAk e o Híbrido em relação ao MHk. Conforme se observa, o esquema Híbrido apresenta resultados muito próximos do esquema MHk. Conclui-se, então, que o cálculo da condutividade térmica com o esquema MHk para a interface onde ocorre a mudança brusca na condutividade é suficiente para melhorar os resultados que são obtidos quando se utiliza somente o MAk.

Para explicar melhor o comportamento do esquema Híbrido, define-se o erro percentual ε para a condutividade térmica como sendo:

$$\varepsilon(\%) = \frac{k(P) - k^{ex}(P)}{k^{ex}(P)} 100 \quad (5.6)$$

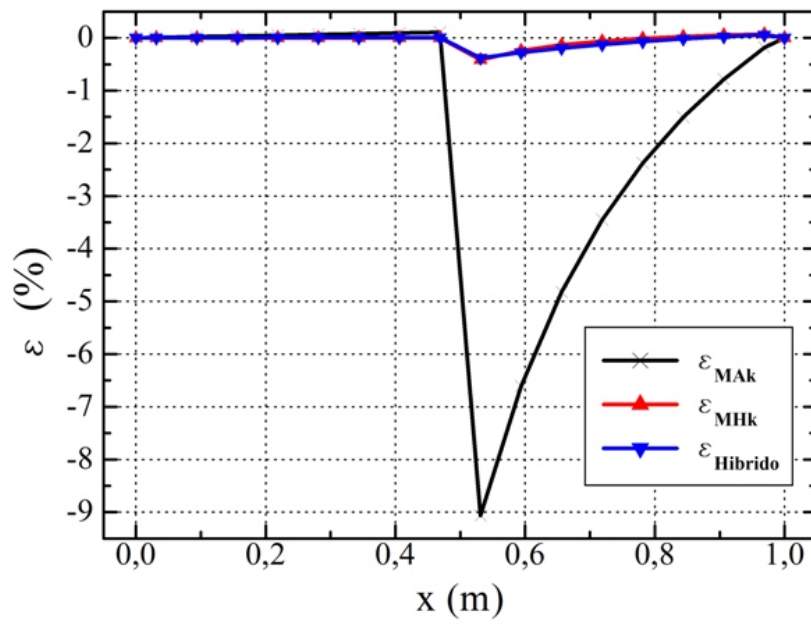
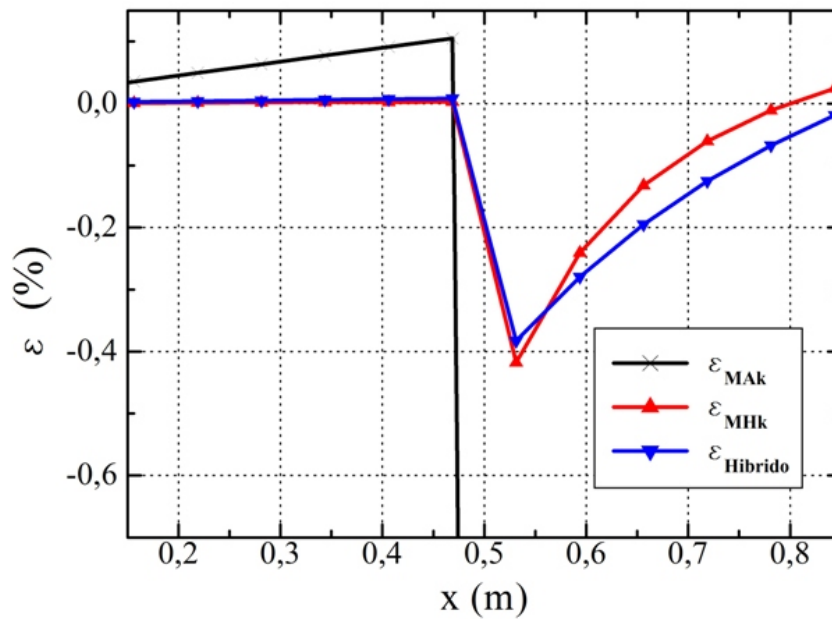
onde $k(P)$ e $k^{ex}(P)$ são as condutividades térmicas numérica e exata, respectivamente, para o ponto P .

Tabela 5.35: Comparação entre os esquemas de cálculo da condutividade térmica para o Problema D considerando o esquema Híbrido

malha	referência (L_1)	----- R -----	
N	MHk	MAk	Híbrido
2	1,0531 10^{-02}	2,4855 10^{01}	1,0000
4	1,0620 10^{-02}	8,9762 10^{00}	0,6763
8	2,5340 10^{-03}	1,6098 10^{01}	1,0003
16	6,3971 10^{-04}	2,9445 10^{01}	1,1594
32	1,5974 10^{-04}	5,6651 10^{01}	1,2666
64	3,9952 10^{-05}	1,1102 10^{02}	1,3264
128	9,9872 10^{-06}	2,1985 10^{02}	1,3592
256	2,4966 10^{-06}	4,3756 10^{02}	1,3763
512	6,2413 10^{-07}	8,7297 10^{02}	1,3849
1.024	1,5603 10^{-07}	1,7438 10^{03}	1,3893
2.048	3,9007 10^{-08}	3,4855 10^{03}	1,3915
4.096	9,7516 10^{-09}	6,9689 10^{03}	1,3926
8.192	2,4379 10^{-09}	1,3936 10^{04}	1,3932
16.384	6,0947 10^{-10}	2,7869 10^{04}	1,3935
32.768	1,5237 10^{-10}	5,5737 10^{04}	1,3936
65.536	3,8092 10^{-11}	1,1147 10^{05}	1,3937
131.072	9,5230 10^{-12}	2,2294 10^{05}	1,3937
262.144	2,3807 10^{-12}	4,4588 10^{05}	1,3937
524.288	5,9519 10^{-13}	8,9175 10^{05}	1,3937
1.048.576	1,4880 10^{-13}	1,7835 10^{06}	1,3937

Tabela 5.36: Erro percentual da condutividade térmica para malha $N = 16$ do Problema D

x(m)	\mathcal{E}_{MAk}	\mathcal{E}_{MHk}	$\mathcal{E}_{Híbrido}$
0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,03125	0,00717	0,00025	0,00061
0,09375	0,02134	0,00063	0,00171
0,15625	0,03544	0,00101	0,00281
0,21875	0,04949	0,00139	0,00391
0,28125	0,06347	0,00176	0,00500
0,34375	0,07740	0,00214	0,00608
0,40625	0,09127	0,00251	0,00716
0,46875	0,10508	0,00288	0,00824
0,53125	-9,06425	-0,41760	-0,38295
0,59375	-6,61300	-0,24080	-0,27948
0,65625	-4,82016	-0,13218	-0,19487
0,71875	-3,45239	-0,06069	-0,12532
0,78125	-2,37475	-0,01116	-0,06751
0,84375	-1,50389	0,02457	-0,01886
0,90625	-0,78556	0,05119	0,02256
0,96875	-0,18294	0,07154	0,05819
1,00000	0,00000	0,00000	0,00000

(a) Diferença percentual (ϵ) da condutividade térmica para $0 \leq x \leq 1$ (b) Diferença percentual (ϵ) - vista ampliada**Figura 5.30:** Diferença percentual (ϵ) da condutividade térmica para o Problema D com $N = 16$

Com a definição do erro percentual (ϵ), Eq. (5.6), é possível fazer uma análise do desempenho do esquema Híbrido em comparação com os esquemas MAk e MHk. Para tanto, escolheu-se a malha com 16 volumes (esta malha está dentro do intervalo convergente dos três esquemas) para fazer a análise. A Tab. 5.36 apresenta os erros percentuais para a condutividade térmica dos esquemas MAk, MHk e Híbrido. Os valores de $k(P)$ e $k^{ex}(P)$ podem ser

consultados no Apêndice F.

Com os valores da Tab. 5.36 é possível plotar um gráfico da distribuição do erro percentual (ε) para a malha $N = 16$. A Fig. 5.30 apresenta ε para cada uma das posições nodais da malha.

Na Fig. 5.30(a), observa-se que o MAk apresenta um aumento expressivo no erro percentual da condutividade térmica na posição $x = 0,5$ e o comportamento do esquema Híbrido é muito próximo do MHk. A Fig. 5.30(b) apresenta uma ampliação da região do gráfico para a posição $x = 0,5$. Pode-se constatar que no esquema Híbrido existe um amortecimento de ε quando comparado ao MAk fazendo, apenas, a inclusão do cálculo da condutividade térmica pela média harmônica na face coincidente com a posição $x = 0,5$.

As análises realizadas, também, levaram em consideração o custo computacional. Para um critério de convergência de $1 \cdot 10^{-10}$, definido na seção 5.2, tem-se o tempo de CPU igual a 21,926 segundos para a malha $N = 1.048.576$. Este tempo é 6,3% maior que o tempo de solução com o esquema MAk e, também, o esquema Híbrido utiliza um pouco mais de tempo computacional que o MHk.

5.5 RESUMO DOS RESULTADOS OBTIDOS

Ao longo do Capítulo 5, pode-se concluir das análises realizadas que:

1. Para problemas puramente difusivos em apenas um único meio, como são os casos apresentados nos Problemas A e B, o esquema mais eficiente é o MAk. Este resultado contraria, de certa forma, o senso comum, que indica a aplicação do esquema MHk. Ainda, pode-se destacar os esquemas DK1D e TkMH pelos resultados obtidos, sendo que o DK1D tem menor custo computacional quando comparado ao TkMH.
2. Para o problema de advecção-difusão, apresentado no Problema E, os esquemas que apresentaram melhores resultados são os que utilizam na formulação a temperatura da face calculada com base no fluxo de calor. Os esquemas com esta característica são: TkMH, KG2P, KG3P, Lk2M, KG4P, KG6P e o DK1D. Na análise deste problema, cabem os seguintes comentários:
 - O esquema TkMH, apesar de calcular a temperatura na face do VC de controle com base no fluxo de calor, utiliza o MHk para calcular a condutividade térmica na face do VC. Melhores resultados seriam alcançados se o MAk fosse utilizado no cálculo, como pode ser comprovado nas análises dos Problemas A e B.

- Os esquemas KG2P, KG3P, KG4P e KG6P apresentaram resultados iguais em relação ao erro de discretização. Isso pode ser explicado pela classe de continuidade da função condutividade térmica do problema que permite que a integração numérica gaussiana obtenha o valor exato.
 - O esquema Lk2M, que utiliza como integração numérica a regra do ponto médio (regra do retângulo), não consegue representar adequadamente o valor da integração numérica da função condutividade térmica.
 - Em uma avaliação geral sobre o desempenho de todos os esquemas, sugere-se a utilização do esquema DK1D como o mais indicado nesse tipo de problema. Este esquema apresenta um dos menores erros de discretização, ver Tab. 5.13, com baixo custo computacional.
 - O esquema com pior desempenho em relação ao erro de discretização é o MHk, sendo este resultado compatível com os obtidos nos problemas com características unicamente difusivas.
 - O esquema AD1D, especialmente projetado para esta aplicação, não apresentou bons resultados.
3. O Problema C é composto por dois meios com condutividades térmicas diferentes. Nesse problema, essas condutividades térmicas são independentes da temperatura e a solução passa a ser linear. Ainda, cabem os seguintes comentários:
- Os esquemas MAk, MAT, KG2P e KG3P deterioram a ordem efetiva da aproximação quando a mudança brusca da condutividade térmica ocorre na face do VC.
 - Os esquemas MHk, LTMH, TkMH, Lk2M, KG4P, KG6P e DK1D não apresentam erro de discretização, sendo os erros numéricos decorrentes exclusivamente dos erros de arredondamento quando a mudança brusca da condutividade térmica ocorre na face do VC.
 - Quando a mudança brusca da condutividade térmica ocorre em um nó do VC, alguns esquemas apresentam um comportamento diverso quando comparado à mudança na face do VC, sendo esse o caso dos esquemas MHk, DK1D e MAT. Os esquemas MHk e DK1D (esses esquemas são equivalentes para o Problema C) têm seus resultados deteriorados em relação à ordem efetiva do erro de discretização. O MAT deixa de ter erros de discretização (esse esquema foi projetado para esta situação), apresentando apenas erros de arredondamento.

- Os esquemas que mantêm a consistência dos resultados, sem erro de discretização, qualquer que seja a posição da mudança da condutividade térmica, face ou nó, são os esquemas LTMH, TkMH, Lk2M, KG4P e KG6P. O esquema MAk não apresenta bons resultados qualquer que seja a configuração utilizada.
 - Para este tipo de problema, sugere-se a utilização dos esquemas LTMH, TkMH, KG4P e KG6P. Essa sugestão leva em consideração que esses esquemas mantêm a consistência quando a mudança abrupta da condutividade térmica acontece na face do VC ou no nó e, ainda, possuem baixo custo computacional. O esquema MHk, apesar de bem aceito para o cálculo de k , não apresenta bons resultados quando a mudança de material (mudança abrupta da condutividade térmica) ocorre no nó do VC.
4. O Problema D é composto por dois meios com condutividades térmicas diferentes. Nesse problema, essas condutividades térmicas são dependentes da temperatura e a solução é não-linear. Em relação aos esquemas avaliados para o cálculo de k , fazem-se os seguintes comentários:
- Os esquemas MAk, MAT, KG2P e KG3P deterioram a ordem efetiva da aproximação quando a mudança brusca da condutividade térmica ocorre na face do VC.
 - Quando a mudança brusca da condutividade térmica ocorre em um nó do VC, alguns esquemas apresentam um comportamento diverso quando comparado à mudança na face do VC. Esse é o caso dos esquemas MHk e MAT. O MHk tem seus resultados deteriorados em relação à ordem efetiva da aproximação que tende para a unidade quando $h \rightarrow 0$. O MAT (esse esquema foi projetado para esta situação) apresenta bons resultados em relação aos erros de discretização, sendo a ordem efetiva da aproximação igual a dois.
 - Os esquemas que mantêm a consistência dos resultados para qualquer que seja a posição da mudança da condutividade térmica, face ou nó, são os esquemas LTMH, TkMH, Lk2M, KG4P, KG6P e DK1D. O esquema MAk não apresenta bons resultados qualquer que seja a configuração utilizada.
 - Sugere-se a utilização do esquema DK1D para o cálculo da condutividade térmica na face do VC considerando que, além de ser um esquema que apresenta bons resultados em termos dos erros de discretização, este esquema apresenta baixo custo computacional quando comparado aos demais.

6 CONCLUSÃO

Os mecanismos de transferência de calor representam um conjunto de problemas de grande interesse na engenharia, onde os fenômenos são, via de regra, de representação bastante complexa.

O método dos volumes finitos foi utilizado neste trabalho para a avaliação dos problemas de transferência de calor, sendo que este método possui base teórica consolidada e sua aplicação é largamente difundida na área da dinâmica de fluidos computacional.

Na solução numérica via MVF, em muitos problemas difusivos, existe a necessidade de se calcular a condutividade térmica na face do VC. As diferentes estratégias numéricas possíveis para o de cálculo de k na face do VC, neste trabalho, foram chamadas de esquemas. Evidentemente, esse valor de k é uma aproximação obtida a partir dos valores nodais da malha. Os esquemas MAk e MHk são bastante difundidos na literatura e comumente empregados para se calcular a condutividade térmica na face do VC e, dependendo do problema e da geração da malha, apresentam bons resultados.

Neste trabalho, foram feitas análises para cinco problemas com características diferentes. Os Problemas A, B e E apresentam a condutividade térmica dependente da temperatura com variações suaves ao longo do domínio de cálculo. Os problemas C e D têm dois materiais com condutividades térmicas diferentes e, nesses problemas com variação abrupta de k , foi possível avaliar o efeito da mudança da condutividade térmica na face ou no nó do VC.

Como contribuições importantes, este trabalho apresenta a avaliação detalhada de sete esquemas disponíveis na literatura e a proposição de outros cinco para o cálculo da condutividade térmica. Para todos os esquemas de cálculo de k foi feita uma análise sobre os erros de discretização e o custo computacional envolvido. Para tanto, foi desenvolvido um programa computacional escrito em linguagem Fortran com precisão quádrupla. O uso da precisão quádrupla se justifica, pois, sabe-se que com o refinamento da malha existe um aumento dos erros de arredondamento. Esses erros de arredondamento são minimizados quanto maior for o número de casas decimais utilizadas.

Durante o Capítulo 5 foram feitas análises detalhadas dos diversos aspectos envolvidos no cálculo de k na face do VC. Assim, tem-se como conclusões finais:

1. O MHk, proposto por Patankar (1980), não apresenta as melhores características para o

cálculo de k , principalmente quando a mudança da condutividade térmica ocorre no nó do VC.

2. A avaliação dos esquemas de cálculo de k não deve ser feita para apenas uma ou duas malhas. Ainda, para que os resultados possam ser comparados, a solução numérica em cada uma das malhas avaliadas deve estar no intervalo convergente.
3. O esquema para cálculo de k na face do VC, quando necessário, deve ser transparente para o analista do problema. Ou seja, não deve ser preocupação do analista o fato de existir influência da geração da malha no resultado ou se o custo computacional é elevado para determinado esquema. Assim, pode-se fazer uma indicação para o esquema de cálculo de k para problemas onde a condutividade térmica é independente ou dependente da temperatura, sendo:
 - Problemas com a condutividade térmica é independente da temperatura: o único problema avaliado neste trabalho foi o Problema C. Conforme mencionado anteriormente, sugere-se para cálculo de k os esquemas LTMH, TkMH, KG4P e KG6P. Pode-se colocar como sugestão única o esquema LTMH pela simplicidade na implementação computacional.
 - Problemas com a condutividade térmica é dependente da temperatura: neste trabalho foram estudados os Problemas A, B, D e E. Pelos resultados apresentados em relação ao erro de discretização e custo computacional, sugere-se a utilização do esquema DK1D para este tipo de problema.

Para trabalhos futuros no estudo de esquemas de cálculo da condutividade térmica na face do VC, são recomendados os seguintes temas:

- Análise dos esquemas propostos neste trabalho para problemas unidimensionais que envolvam mudança de fase.
- Com base nos esquemas unidimensionais propostos, desenvolver esquemas para a utilização em problemas bidimensionais e tridimensionais.
- Analisar os esquemas existentes e desenvolver novos esquemas para o cálculo na face do VC de outras propriedades como, por exemplo, a viscosidade.

A solução numérica dos problemas de CFD via MVF necessita de muitos desenvolvimentos e avaliações consistentes com base na análise de erros numéricos. Este texto avaliou vários

esquemas de cálculo de k na face do VC e contribuiu para auxiliar o analista numérico a escolher o melhor esquema para problemas diferentes.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ADAMS, J. C.; BRAINERD, W. S.; MARTIN, J. T.; SMITH, B. T.; WAGENER, J. L. **Fortran 95 Handbook**. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, 1997.

AIAA. **Guide for the Verification and Validation of Computational Fluid Dynamics Simulations**. AIAA G-077-1998. Reston: AIAA Journal, 1998.

ANDERSON, D. A.; TANNEHILL, J. C.; PLETCHER, R. H. **Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer**. 2. ed. Washington, DC: Taylor & Francis, 1997.

BIRD, R. B.; STEWART, W. E.; LIGHTFOOT, E. N. **Fenômenos de Transporte**. 2. ed. Rio de Janeiro - RJ: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 2004.

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Análise Numérica**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.

CHANG, K. C.; PAYNE, U. J. Analytical and numerical approaches for heat conduction in composite materials. **Mathematical and Computer Modelling**, v. 14, p. 899 – 904, 1990.

CHANG, K. C.; PAYNE, U. J. Analytical solution for heat conduction in a two-material-layer with linearly temperature-dependent conductivity. **Journal of Heat Transfer**, v. 113, p. 237–239, 1991.

CHANG, K. C.; PAYNE, U. J. Numerical treatment of diffusion coefficients at interfaces. **Numerical Heat Transfer, Part A: Applications**, v. 21, n. 3, p. 363 – 376, 1992.

CHUNG, T. J. **Computational Fluid Dynamics**. New York: Cambridge University Press, 2002.

COURANT, R.; ISAACSON, E.; REES, M. On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, v. 5, p. 243–255, 1952.

FERZIGER, J. H.; PERIC, M. **Computational Methods for Fluid Dynamics**. 3. ed. Germany: Springer, 2002.

FILHO, W. B. **Transmissão de Calor**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004.

FORTUNA, A. d. O. **Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos : Conceitos Básicos e Aplicações**. São Paulo: EdUSP, 2000.

INCROPERA, F.; WITT, D. D. **Fundamentals of Heat and Mass Transfer**. 4. ed. New York: John Wiley and Sons, 1996.

KHODIER, A. M. M. A finite difference scheme on nonuniform grids. **International Journal of Computer Mathematics**, v. 77, n. 1, p. 145–152, 2001.

KREYSZIG, E. **Advanced Engineering Mathematics**. 8. ed. New York: John Wiley & Sons, 1999.

LEONARD, B. P. A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 19, p. 59–98, 1979.

LIU, Z.; MA, C. A new method for numerical treatment of diffusion coefficients at control-volume surfaces. **Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals**, Taylor & Francis Inc, 47, n. 5, p. 491–505, 2005.

MALISKA, C. R. **Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional**. 2. ed. Rio de Janeiro - RJ: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 2004.

MARCHI, C. H. **Verificação de Soluções Numéricas Unidimensionais em Dinâmica dos Fluidos**. Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica) — UFSC, Florianópolis, 2001.

MARCHI, C. H. **Comunicação Pessoal**. Curitiba, 2007.

OBERKAMPF, W. L.; BLOTTNER, F. G. Issues in computational fluid dynamics code verification and validation. **AIAA Journal**, v. 36, n. 5, p. 687–695, 1998.

OOSTHUIZEN, P. H.; NAYLOR, D. **An Introduction to convective heat transfer analysis**. New York: WCB/McGraw-Hill, 1999.

ÖZISIK, M. N. **Heat conduction**. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 1993.

PATANKAR, S. V. **Numerical Heat Transfer and Fluid Flow**. Washington D. C.: Hemisphere Publishing Corporation, 1980.

PERTSCHI, C. T. L. **Esquemas de cálculo da condutividade térmica nas faces de volumes finitos**. Tese (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica) — UFPR, Curitiba, 2008.

RICHARDSON, L. F. The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations with an application to the stresses in a masonry dam. **Transactions of the Royal Society of London**, Ser. A, n. 210, p. 307–357, 1910.

ROACHE, P. J. **Verification and Validation in Computational Science and Engineering**. Albuquerque: Hermosa, 1998.

ROHSENOW, W. M.; HARTNETT, J. R.; CHO, Y. I. **Handbook of Heat Transfer**. 3. ed. New York: McGraw-Hill, 1998.

ROY, C. J.; OBER, C. C.; NELSON, C. C.; SMITH, T. M. Verification of euler / navier-stokes codes using the method of manufactured solutions. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 44, n. 6, p. 599–620, 2004.

ROY, C. J.; OBERKAMPF, W. L.; MCWHERTER-PAYNE, M. A. Verification and validation for laminar hypersonic flowfields, part 1: Verification. **AIAA Journal**, v. 41, n. 10, p. 1934–1943, 2003.

SCHNEIDER, F. A. **Verificação de soluções numéricas em problemas difusivos e advectivos com malhas não-uniformes**. Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia) — UFPR, Curitiba, 2007.

SZABÓ, B.; BABUSKA, I. **Finite Element Analysis**. New York: John Wiley & Sons, 1991.

SZIDAROVSKY, F.; YAKOWITZ, S. **Principles and procedures of numerical analysis**. New York: Plenum Press, 1978.

TAO, L. N. The heat conduction problem with temperature-dependent material properties. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 32, n. 3, p. 487 – 491, 1989.

VERSTEEG, H.; MALALASEKERA, W. **An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method**. London: Prentice Hall, 1995.

VOLLER, V. R. Numerical treatment of rapidly changing and discontinuous conductivities. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, Pergamon-Elsevier Science Ltd, v. 44, n. 23, p. 4553–4556, 2001.

VOLLER, V. R.; SWAMINATHAN, C. R. The treatment of discontinuous thermal conductivity in control volume solutions of phase change problems. **Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals**, v. 24, p. 161–180, 1993.

ZHAO, F. Y.; TANG, G. F.; LIU, D. Conjugate natural convection in enclosures with external and internal heat sources. **International Journal of Engineering Science**, v. 44, n. 3-4, p. 148 – 165, 2006.

APÊNDICE A – RESULTADOS PARA O PROBLEMA A

Tabela A.1: Média da norma l_1 dos erros verdadeiros (E) para o Problema A

malha	L											
N	MAK	MHK	MAT	LTMH	TKMH	KG2P	KG3P	LK2M	KG4P	KG6P	DKID	
2	3,8607 10 ⁻⁰²	3,5737 10 ⁻⁰²	3,7215 10 ⁻⁰²	3,6852 10 ⁻⁰²	3,8254 10 ⁻⁰²	3,7690 10 ⁻⁰²	3,7691 10 ⁻⁰²	3,7562 10 ⁻⁰²	3,7691 10 ⁻⁰²	3,7691 10 ⁻⁰²	3,7691 10 ⁻⁰²	
4	9,9295 10 ⁻⁰³	1,0231 10 ⁻⁰²	1,0072 10 ⁻⁰²	1,0110 10 ⁻⁰²	9,9651 10 ⁻⁰³	1,0022 10 ⁻⁰²	1,0022 10 ⁻⁰²	1,0036 10 ⁻⁰²	1,0022 10 ⁻⁰²	1,0022 10 ⁻⁰²	1,0022 10 ⁻⁰²	
8	2,3969 10 ⁻⁰³	2,7420 10 ⁻⁰³	2,5683 10 ⁻⁰³	2,6115 10 ⁻⁰³	2,4399 10 ⁻⁰³	2,5108 10 ⁻⁰³	2,5108 10 ⁻⁰³	2,5254 10 ⁻⁰³	2,5108 10 ⁻⁰³	2,5108 10 ⁻⁰³	2,5108 10 ⁻⁰³	
16	5,8129 10 ⁻⁰⁴	7,0937 10 ⁻⁰⁴	6,4523 10 ⁻⁰⁴	6,6125 10 ⁻⁰⁴	5,9729 10 ⁻⁰⁴	6,2389 10 ⁻⁰⁴	6,2389 10 ⁻⁰⁴	6,2925 10 ⁻⁰⁴	6,2389 10 ⁻⁰⁴	6,2389 10 ⁻⁰⁴	6,2389 10 ⁻⁰⁴	
32	1,4269 10 ⁻⁰⁴	1,8034 10 ⁻⁰⁴	1,6151 10 ⁻⁰⁴	1,6621 10 ⁻⁰⁴	1,4740 10 ⁻⁰⁴	1,5523 10 ⁻⁰⁴	1,5523 10 ⁻⁰⁴	1,5680 10 ⁻⁰⁴	1,5523 10 ⁻⁰⁴	1,5523 10 ⁻⁰⁴	1,5523 10 ⁻⁰⁴	
64	3,5322 10 ⁻⁰⁵	4,5457 10 ⁻⁰⁵	4,0389 10 ⁻⁰⁵	4,1656 10 ⁻⁰⁵	3,6589 10 ⁻⁰⁵	3,8700 10 ⁻⁰⁵	3,8700 10 ⁻⁰⁵	3,9122 10 ⁻⁰⁵	3,8700 10 ⁻⁰⁵	3,8700 10 ⁻⁰⁵	3,8700 10 ⁻⁰⁵	
128	8,7855 10 ⁻⁰⁶	1,1411 10 ⁻⁰⁵	1,0098 10 ⁻⁰⁵	1,0426 10 ⁻⁰⁵	9,1136 10 ⁻⁰⁶	9,6605 10 ⁻⁰⁶	9,6605 10 ⁻⁰⁶	9,7699 10 ⁻⁰⁶	9,6605 10 ⁻⁰⁶	9,6605 10 ⁻⁰⁶	9,6605 10 ⁻⁰⁶	
256	2,1907 10 ⁻⁰⁶	2,8584 10 ⁻⁰⁶	2,5246 10 ⁻⁰⁶	2,6080 10 ⁻⁰⁶	2,2741 10 ⁻⁰⁶	2,4133 10 ⁻⁰⁶	2,4133 10 ⁻⁰⁶	2,4411 10 ⁻⁰⁶	2,4133 10 ⁻⁰⁶	2,4133 10 ⁻⁰⁶	2,4133 10 ⁻⁰⁶	
512	5,4695 10 ⁻⁰⁷	7,1533 10 ⁻⁰⁷	6,3114 10 ⁻⁰⁷	6,5219 10 ⁻⁰⁷	5,6800 10 ⁻⁰⁷	6,0308 10 ⁻⁰⁷	6,0308 10 ⁻⁰⁷	6,1009 10 ⁻⁰⁷	6,0308 10 ⁻⁰⁷	6,0308 10 ⁻⁰⁷	6,0308 10 ⁻⁰⁷	
1.024	1,3665 10 ⁻⁰⁷	1,7892 10 ⁻⁰⁷	1,5779 10 ⁻⁰⁷	1,6307 10 ⁻⁰⁷	1,4193 10 ⁻⁰⁷	1,5074 10 ⁻⁰⁷	1,5074 10 ⁻⁰⁷	1,5250 10 ⁻⁰⁷	1,5074 10 ⁻⁰⁷	1,5074 10 ⁻⁰⁷	1,5074 10 ⁻⁰⁷	
2.048	3,4150 10 ⁻⁰⁸	4,4742 10 ⁻⁰⁸	3,9446 10 ⁻⁰⁸	4,0770 10 ⁻⁰⁸	3,5474 10 ⁻⁰⁸	3,7681 10 ⁻⁰⁸	3,7681 10 ⁻⁰⁸	3,8122 10 ⁻⁰⁸	3,7681 10 ⁻⁰⁸	3,7681 10 ⁻⁰⁸	3,7681 10 ⁻⁰⁸	
4.096	8,5362 10 ⁻⁰⁹	1,1187 10 ⁻⁰⁸	9,8616 10 ⁻⁰⁹	1,0193 10 ⁻⁰⁸	8,8676 10 ⁻⁰⁹	9,4198 10 ⁻⁰⁹	9,4198 10 ⁻⁰⁹	9,5302 10 ⁻⁰⁹	9,4198 10 ⁻⁰⁹	9,4198 10 ⁻⁰⁹	9,4198 10 ⁻⁰⁹	
8.192	2,1339 10 ⁻⁰⁹	2,7969 10 ⁻⁰⁹	2,4654 10 ⁻⁰⁹	2,5483 10 ⁻⁰⁹	2,2168 10 ⁻⁰⁹	2,3549 10 ⁻⁰⁹	2,3549 10 ⁻⁰⁹	2,3825 10 ⁻⁰⁹	2,3549 10 ⁻⁰⁹	2,3549 10 ⁻⁰⁹	2,3549 10 ⁻⁰⁹	
16.384	5,3345 10 ⁻¹⁰	6,9925 10 ⁻¹⁰	6,1635 10 ⁻¹⁰	6,3708 10 ⁻¹⁰	5,5417 10 ⁻¹⁰	5,8872 10 ⁻¹⁰	5,8872 10 ⁻¹⁰	5,9562 10 ⁻¹⁰	5,8872 10 ⁻¹⁰	5,8872 10 ⁻¹⁰	5,8872 10 ⁻¹⁰	
32.768	1,3336 10 ⁻¹⁰	1,7482 10 ⁻¹⁰	1,5409 10 ⁻¹⁰	1,5927 10 ⁻¹⁰	1,3854 10 ⁻¹⁰	1,4718 10 ⁻¹⁰	1,4718 10 ⁻¹⁰	1,4891 10 ⁻¹⁰	1,4718 10 ⁻¹⁰	1,4718 10 ⁻¹⁰	1,4718 10 ⁻¹⁰	
65.536	3,3339 10 ⁻¹¹	4,3704 10 ⁻¹¹	3,8522 10 ⁻¹¹	3,9817 10 ⁻¹¹	3,4635 10 ⁻¹¹	3,6794 10 ⁻¹¹	3,6794 10 ⁻¹¹	3,7226 10 ⁻¹¹	3,6794 10 ⁻¹¹	3,6794 10 ⁻¹¹	3,6794 10 ⁻¹¹	
131.072	8,3348 10 ⁻¹²	1,0926 10 ⁻¹¹	9,6305 10 ⁻¹²	9,9544 10 ⁻¹²	8,6587 10 ⁻¹²	9,1986 10 ⁻¹²	9,1986 10 ⁻¹²	9,3066 10 ⁻¹²	9,1986 10 ⁻¹²	9,1986 10 ⁻¹²	9,1986 10 ⁻¹²	
262.144	2,0837 10 ⁻¹²	2,7315 10 ⁻¹²	2,4076 10 ⁻¹²	2,4886 10 ⁻¹²	2,1647 10 ⁻¹²	2,2996 10 ⁻¹²	2,2996 10 ⁻¹²	2,3266 10 ⁻¹²	2,2996 10 ⁻¹²	2,2996 10 ⁻¹²	2,2996 10 ⁻¹²	
524.288	5,2092 10 ⁻¹³	6,8288 10 ⁻¹³	6,0190 10 ⁻¹³	6,2215 10 ⁻¹³	5,4117 10 ⁻¹³	5,7491 10 ⁻¹³	5,7491 10 ⁻¹³	5,8166 10 ⁻¹³	5,7491 10 ⁻¹³	5,7491 10 ⁻¹³	5,7491 10 ⁻¹³	
1.048.576	1,3023 10 ⁻¹³	1,7072 10 ⁻¹³	1,5048 10 ⁻¹³	1,5554 10 ⁻¹³	1,3529 10 ⁻¹³	1,4373 10 ⁻¹³	1,4373 10 ⁻¹³	1,4541 10 ⁻¹³	1,4373 10 ⁻¹³	1,4373 10 ⁻¹³	1,4373 10 ⁻¹³	

APÊNDICE B – RESULTADOS PARA O PROBLEMA B

Tabela B.1: Média da norma l_1 dos erros verdadeiros (E) para o Problema B

malha	L											
N	MAK	MHK	MAT	LTMH	TKMH	KG2P	KG3P	LK2M	KG4P	KG6P	DKID	
2	1,6792 10 ⁻⁰¹	1,6792 10 ⁻⁰¹	1,6792 10 ⁻⁰¹	1,6792 10 ⁻⁰¹	1,6792 10 ⁻⁰¹	1,6792 10 ⁻⁰¹	1,6792 10 ⁻⁰¹	1,6792 10 ⁻⁰¹	1,6792 10 ⁻⁰¹	1,6792 10 ⁻⁰¹	1,6792 10 ⁻⁰¹	
4	1,6568 10 ⁻⁰¹	1,6567 10 ⁻⁰¹	1,6567 10 ⁻⁰¹	1,6567 10 ⁻⁰¹	1,6568 10 ⁻⁰¹	1,6567 10 ⁻⁰¹	1,6567 10 ⁻⁰¹	1,6567 10 ⁻⁰¹	1,6567 10 ⁻⁰¹	1,6567 10 ⁻⁰¹	1,6567 10 ⁻⁰¹	
8	1,4595 10 ⁻⁰¹	1,4593 10 ⁻⁰¹	1,4594 10 ⁻⁰¹	1,4594 10 ⁻⁰¹	1,4595 10 ⁻⁰¹	1,4594 10 ⁻⁰¹	1,4594 10 ⁻⁰¹	1,4594 10 ⁻⁰¹	1,4594 10 ⁻⁰¹	1,4594 10 ⁻⁰¹	1,4594 10 ⁻⁰¹	
16	1,0446 10 ⁻⁰¹	1,0444 10 ⁻⁰¹	1,0445 10 ⁻⁰¹	1,0445 10 ⁻⁰¹	1,0446 10 ⁻⁰¹	1,0445 10 ⁻⁰¹	1,0445 10 ⁻⁰¹	1,0445 10 ⁻⁰¹	1,0445 10 ⁻⁰¹	1,0445 10 ⁻⁰¹	1,0445 10 ⁻⁰¹	
32	4,7977 10 ⁻⁰²	4,8000 10 ⁻⁰²	4,7984 10 ⁻⁰²	4,7988 10 ⁻⁰²	4,7977 10 ⁻⁰²	4,7982 10 ⁻⁰²	4,7982 10 ⁻⁰²	4,7983 10 ⁻⁰²	4,7982 10 ⁻⁰²	4,7982 10 ⁻⁰²	4,7982 10 ⁻⁰²	
64	1,2783 10 ⁻⁰²	1,2986 10 ⁻⁰²	1,2850 10 ⁻⁰²	1,2884 10 ⁻⁰²	1,2783 10 ⁻⁰²	1,2827 10 ⁻⁰²	1,2827 10 ⁻⁰²	1,2833 10 ⁻⁰²	1,2827 10 ⁻⁰²	1,2827 10 ⁻⁰²	1,2827 10 ⁻⁰²	
128	2,7666 10 ⁻⁰³	3,0651 10 ⁻⁰³	2,8633 10 ⁻⁰³	2,9128 10 ⁻⁰³	2,7672 10 ⁻⁰³	2,8307 10 ⁻⁰³	2,8307 10 ⁻⁰³	2,8394 10 ⁻⁰³	2,8307 10 ⁻⁰³	2,8307 10 ⁻⁰³	2,8307 10 ⁻⁰³	
256	5,8784 10 ⁻⁰⁴	7,9720 10 ⁻⁰⁴	6,5523 10 ⁻⁰⁴	6,8988 10 ⁻⁰⁴	5,8831 10 ⁻⁰⁴	6,3246 10 ⁻⁰⁴	6,3246 10 ⁻⁰⁴	6,3860 10 ⁻⁰⁴	6,3246 10 ⁻⁰⁴	6,3246 10 ⁻⁰⁴	6,3246 10 ⁻⁰⁴	
512	1,2669 10 ⁻⁰⁴	2,2047 10 ⁻⁰⁴	1,5721 10 ⁻⁰⁴	1,7277 10 ⁻⁰⁴	1,2684 10 ⁻⁰⁴	1,4694 10 ⁻⁰⁴	1,4694 10 ⁻⁰⁴	1,4965 10 ⁻⁰⁴	1,4694 10 ⁻⁰⁴	1,4694 10 ⁻⁰⁴	1,4694 10 ⁻⁰⁴	
1.024	2,8154 10 ⁻⁰⁵	6,0265 10 ⁻⁰⁵	3,8742 10 ⁻⁰⁵	4,4084 10 ⁻⁰⁵	2,8178 10 ⁻⁰⁵	3,5197 10 ⁻⁰⁵	3,5197 10 ⁻⁰⁵	3,6105 10 ⁻⁰⁵	3,5197 10 ⁻⁰⁵	3,5197 10 ⁻⁰⁵	3,5197 10 ⁻⁰⁵	
2.048	6,5042 10 ⁻⁰⁶	1,5963 10 ⁻⁰⁵	9,6454 10 ⁻⁰⁶	1,1221 10 ⁻⁰⁵	6,5067 10 ⁻⁰⁶	8,5968 10 ⁻⁰⁶	8,5968 10 ⁻⁰⁶	8,8612 10 ⁻⁰⁶	8,5968 10 ⁻⁰⁶	8,5968 10 ⁻⁰⁶	8,5968 10 ⁻⁰⁶	
4.096	1,5526 10 ⁻⁰⁶	4,1239 10 ⁻⁰⁶	2,4087 10 ⁻⁰⁶	2,8372 10 ⁻⁰⁶	1,5528 10 ⁻⁰⁶	2,1232 10 ⁻⁰⁶	2,1232 10 ⁻⁰⁶	2,1948 10 ⁻⁰⁶	2,1232 10 ⁻⁰⁶	2,1232 10 ⁻⁰⁶	2,1232 10 ⁻⁰⁶	
8.192	3,7854 10 ⁻⁰⁷	1,0492 10 ⁻⁰⁶	6,0202 10 ⁻⁰⁷	7,1378 10 ⁻⁰⁷	3,7855 10 ⁻⁰⁷	5,2752 10 ⁻⁰⁷	5,2752 10 ⁻⁰⁷	5,4615 10 ⁻⁰⁷	5,2752 10 ⁻⁰⁷	5,2752 10 ⁻⁰⁷	5,2752 10 ⁻⁰⁷	
16.384	9,3411 10 ⁻⁰⁸	2,6467 10 ⁻⁰⁷	1,5049 10 ⁻⁰⁷	1,7904 10 ⁻⁰⁷	9,3412 10 ⁻⁰⁸	1,3147 10 ⁻⁰⁷	1,3147 10 ⁻⁰⁷	1,3622 10 ⁻⁰⁷	1,3147 10 ⁻⁰⁷	1,3147 10 ⁻⁰⁷	1,3147 10 ⁻⁰⁷	
32.768	2,3198 10 ⁻⁰⁸	6,6473 10 ⁻⁰⁸	3,7623 10 ⁻⁰⁸	4,4835 10 ⁻⁰⁸	2,3198 10 ⁻⁰⁸	3,2815 10 ⁻⁰⁸	3,2815 10 ⁻⁰⁸	3,4017 10 ⁻⁰⁸	3,2815 10 ⁻⁰⁸	3,2815 10 ⁻⁰⁸	3,2815 10 ⁻⁰⁸	
65.536	5,7802 10 ⁻⁰⁹	1,6657 10 ⁻⁰⁸	9,4057 10 ⁻⁰⁹	1,1218 10 ⁻⁰⁸	5,7802 10 ⁻⁰⁹	8,1972 10 ⁻⁰⁹	8,1972 10 ⁻⁰⁹	8,4993 10 ⁻⁰⁹	8,1972 10 ⁻⁰⁹	8,1972 10 ⁻⁰⁹	8,1972 10 ⁻⁰⁹	
131.072	1,4426 10 ⁻⁰⁹	4,1690 10 ⁻⁰⁹	2,3514 10 ⁻⁰⁹	2,8058 10 ⁻⁰⁹	1,4426 10 ⁻⁰⁹	2,0485 10 ⁻⁰⁹	2,0485 10 ⁻⁰⁹	2,1242 10 ⁻⁰⁹	2,0485 10 ⁻⁰⁹	2,0485 10 ⁻⁰⁹	2,0485 10 ⁻⁰⁹	
262.144	3,6035 10 ⁻¹⁰	1,0429 10 ⁻⁰⁹	5,8785 10 ⁻¹⁰	7,0161 10 ⁻¹⁰	3,6035 10 ⁻¹⁰	5,1202 10 ⁻¹⁰	5,1202 10 ⁻¹⁰	5,3098 10 ⁻¹⁰	5,1202 10 ⁻¹⁰	5,1202 10 ⁻¹⁰	5,1202 10 ⁻¹⁰	
524.288	9,0049 10 ⁻¹¹	2,6079 10 ⁻¹⁰	1,4696 10 ⁻¹⁰	1,7542 10 ⁻¹⁰	9,0049 10 ⁻¹¹	1,2799 10 ⁻¹⁰	1,2799 10 ⁻¹⁰	1,3273 10 ⁻¹⁰	1,2799 10 ⁻¹⁰	1,2799 10 ⁻¹⁰	1,2799 10 ⁻¹⁰	
1.048.576	2,2507 10 ⁻¹¹	6,5207 10 ⁻¹¹	3,6741 10 ⁻¹¹	4,3857 10 ⁻¹¹	2,2507 10 ⁻¹¹	3,1996 10 ⁻¹¹	3,1996 10 ⁻¹¹	3,3182 10 ⁻¹¹	3,1996 10 ⁻¹¹	3,1996 10 ⁻¹¹	3,1996 10 ⁻¹¹	

APÊNDICE C – RESULTADOS PARA O PROBLEMA C

Tabela C.1: Média da norma l_1 dos erros verdadeiros (E) para o Problema C

malha	L											
	N	MAK	MHK	MAT	LTMH	TRMH	KG2P	KG3P	LK2M	KG4P	KG6P	DKID
	2	$1,2578 \cdot 10^{-01}$	0,0000	$1,7308 \cdot 10^{-01}$	0,0000	0,0000	$1,2578 \cdot 10^{-01}$	$1,5244 \cdot 10^{-01}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	$5,0248 \cdot 10^{-02}$	0,0000	$6,4286 \cdot 10^{-02}$	0,0000	0,0000	$5,0248 \cdot 10^{-02}$	$5,8411 \cdot 10^{-02}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	8	$2,2830 \cdot 10^{-02}$	0,0000	$2,8481 \cdot 10^{-02}$	0,0000	0,0000	$2,2830 \cdot 10^{-02}$	$2,6151 \cdot 10^{-02}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	16	$1,0916 \cdot 10^{-02}$	0,0000	$1,3473 \cdot 10^{-02}$	0,0000	0,0000	$1,0916 \cdot 10^{-02}$	$1,2425 \cdot 10^{-02}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	32	$5,3416 \cdot 10^{-03}$	0,0000	$6,5598 \cdot 10^{-03}$	0,0000	0,0000	$5,3416 \cdot 10^{-03}$	$6,0621 \cdot 10^{-03}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	64	$2,6426 \cdot 10^{-03}$	0,0000	$3,2374 \cdot 10^{-03}$	0,0000	0,0000	$2,6426 \cdot 10^{-03}$	$2,9947 \cdot 10^{-03}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	128	$1,3143 \cdot 10^{-03}$	0,0000	$1,6083 \cdot 10^{-03}$	0,0000	0,0000	$1,3143 \cdot 10^{-03}$	$1,4884 \cdot 10^{-03}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	256	$6,5545 \cdot 10^{-04}$	0,0000	$8,0157 \cdot 10^{-04}$	0,0000	0,0000	$6,5545 \cdot 10^{-04}$	$7,4202 \cdot 10^{-04}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	512	$3,2729 \cdot 10^{-04}$	0,0000	$4,0014 \cdot 10^{-04}$	0,0000	0,0000	$3,2729 \cdot 10^{-04}$	$3,7046 \cdot 10^{-04}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1.024	$1,6354 \cdot 10^{-04}$	0,0000	$1,9991 \cdot 10^{-04}$	0,0000	0,0000	$1,6354 \cdot 10^{-04}$	$1,8509 \cdot 10^{-04}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2.048	$8,1743 \cdot 10^{-05}$	0,0000	$9,9916 \cdot 10^{-05}$	0,0000	0,0000	$8,1743 \cdot 10^{-05}$	$9,2512 \cdot 10^{-05}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4.096	$4,0865 \cdot 10^{-05}$	0,0000	$4,9948 \cdot 10^{-05}$	0,0000	0,0000	$4,0865 \cdot 10^{-05}$	$4,6247 \cdot 10^{-05}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	8.192	$2,0431 \cdot 10^{-05}$	0,0000	$2,4971 \cdot 10^{-05}$	0,0000	0,0000	$2,0431 \cdot 10^{-05}$	$2,3122 \cdot 10^{-05}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	16.384	$1,0215 \cdot 10^{-05}$	0,0000	$1,2485 \cdot 10^{-05}$	0,0000	0,0000	$1,0215 \cdot 10^{-05}$	$1,1560 \cdot 10^{-05}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	32.768	$5,1074 \cdot 10^{-06}$	0,0000	$6,2424 \cdot 10^{-06}$	0,0000	0,0000	$5,1074 \cdot 10^{-06}$	$5,7800 \cdot 10^{-06}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	65.536	$2,5537 \cdot 10^{-06}$	0,0000	$3,1212 \cdot 10^{-06}$	0,0000	0,0000	$2,5537 \cdot 10^{-06}$	$2,8900 \cdot 10^{-06}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	131.072	$1,2768 \cdot 10^{-06}$	0,0000	$1,5606 \cdot 10^{-06}$	0,0000	0,0000	$1,2768 \cdot 10^{-06}$	$1,4450 \cdot 10^{-06}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	262.144	$6,3841 \cdot 10^{-07}$	0,0000	$7,8028 \cdot 10^{-07}$	0,0000	0,0000	$6,3841 \cdot 10^{-07}$	$7,2248 \cdot 10^{-07}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	524.288	$3,1921 \cdot 10^{-07}$	0,0000	$3,9014 \cdot 10^{-07}$	0,0000	0,0000	$3,1921 \cdot 10^{-07}$	$3,6124 \cdot 10^{-07}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1.048.576	$1,5960 \cdot 10^{-07}$	0,0000	$1,9507 \cdot 10^{-07}$	0,0000	0,0000	$1,5960 \cdot 10^{-07}$	$1,8062 \cdot 10^{-07}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

APÊNDICE D – RESULTADOS PARA O PROBLEMA D

Tabela D.1: Média da norma l_1 dos erros verdadeiros (E) para o Problema D

malha	L											
N	MAK	MHK	MAT	LTMH	TKMH	KG2P	KG3P	LK2M	KG4P	KG6P	DKID	
2	2,6173 10 ⁻⁰¹	1,0531 10 ⁻⁰²	8,2279 10 ⁻⁰²	5,5881 10 ⁻⁰³	2,0349 10 ⁻⁰²	2,6252 10 ⁻⁰¹	2,3251 10 ⁻⁰¹	4,3676 10 ⁻⁰³	3,7491 10 ⁻⁰³	1,5876 10 ⁻⁰²	1,8867 10 ⁻⁰²	
4	9,5330 10 ⁻⁰²	1,0620 10 ⁻⁰²	5,3612 10 ⁻⁰²	5,8718 10 ⁻⁰³	4,7688 10 ⁻⁰³	9,3835 10 ⁻⁰²	8,9030 10 ⁻⁰²	5,2115 10 ⁻⁰³	5,1500 10 ⁻⁰³	3,6521 10 ⁻⁰³	4,2210 10 ⁻⁰³	
8	4,0793 10 ⁻⁰²	2,5340 10 ⁻⁰³	3,0781 10 ⁻⁰²	1,4600 10 ⁻⁰³	1,0504 10 ⁻⁰³	4,0329 10 ⁻⁰²	3,8740 10 ⁻⁰²	1,4039 10 ⁻⁰³	1,4049 10 ⁻⁰³	9,6051 10 ⁻⁰⁴	1,0339 10 ⁻⁰³	
16	1,8836 10 ⁻⁰²	6,3971 10 ⁻⁰⁴	1,6517 10 ⁻⁰²	3,6324 10 ⁻⁰⁴	2,3485 10 ⁻⁰⁴	1,8720 10 ⁻⁰²	1,8063 10 ⁻⁰²	3,6830 10 ⁻⁰⁴	3,7077 10 ⁻⁰⁴	2,5259 10 ⁻⁰⁴	2,5863 10 ⁻⁰⁴	
32	9,0493 10 ⁻⁰³	1,5974 10 ⁻⁰⁴	8,5584 10 ⁻⁰³	9,0429 10 ⁻⁰⁵	5,4517 10 ⁻⁰⁵	9,0209 10 ⁻⁰³	8,7212 10 ⁻⁰³	9,5206 10 ⁻⁰⁵	9,6614 10 ⁻⁰⁵	6,5170 10 ⁻⁰⁵	6,4872 10 ⁻⁰⁵	
64	4,4353 10 ⁻⁰³	3,9952 10 ⁻⁰⁵	4,3567 10 ⁻⁰³	2,2605 10 ⁻⁰⁵	1,3058 10 ⁻⁰⁵	4,4283 10 ⁻⁰³	4,2851 10 ⁻⁰³	2,4195 10 ⁻⁰⁵	2,4592 10 ⁻⁰⁵	1,6576 10 ⁻⁰⁵	1,6258 10 ⁻⁰⁵	
128	2,1957 10 ⁻⁰³	9,9872 10 ⁻⁰⁶	2,1980 10 ⁻⁰³	5,6430 10 ⁻⁰⁶	3,1904 10 ⁻⁰⁶	2,1940 10 ⁻⁰³	2,1239 10 ⁻⁰³	6,1014 10 ⁻⁰⁶	6,2054 10 ⁻⁰⁶	4,1814 10 ⁻⁰⁶	4,0703 10 ⁻⁰⁶	
256	1,0924 10 ⁻⁰³	2,4966 10 ⁻⁰⁶	1,1040 10 ⁻⁰³	1,4097 10 ⁻⁰⁶	7,8814 10 ⁻⁰⁷	1,0920 10 ⁻⁰³	1,0573 10 ⁻⁰³	1,5320 10 ⁻⁰⁶	1,5587 10 ⁻⁰⁶	1,0502 10 ⁻⁰⁶	1,0183 10 ⁻⁰⁶	
512	5,4485 10 ⁻⁰⁴	6,2413 10 ⁻⁰⁷	5,5323 10 ⁻⁰⁴	3,5229 10 ⁻⁰⁷	1,9584 10 ⁻⁰⁷	5,4474 10 ⁻⁰⁴	5,2752 10 ⁻⁰⁴	3,8382 10 ⁻⁰⁷	3,9062 10 ⁻⁰⁷	2,6315 10 ⁻⁰⁷	2,5469 10 ⁻⁰⁷	
1.024	2,7209 10 ⁻⁰⁴	1,5603 10 ⁻⁰⁷	2,7693 10 ⁻⁰⁴	8,8054 10 ⁻⁰⁸	4,8811 10 ⁻⁰⁸	2,7206 10 ⁻⁰⁴	2,6347 10 ⁻⁰⁴	9,6058 10 ⁻⁰⁸	9,7773 10 ⁻⁰⁸	6,5864 10 ⁻⁰⁸	6,3685 10 ⁻⁰⁸	
2.048	1,3596 10 ⁻⁰⁴	3,9007 10 ⁻⁰⁸	1,3854 10 ⁻⁰⁴	2,2011 10 ⁻⁰⁸	1,2184 10 ⁻⁰⁸	1,3595 10 ⁻⁰⁴	1,3167 10 ⁻⁰⁴	2,4028 10 ⁻⁰⁸	2,4458 10 ⁻⁰⁸	1,6476 10 ⁻⁰⁸	1,5923 10 ⁻⁰⁸	
4.096	6,7958 10 ⁻⁰⁵	9,7516 10 ⁻⁰⁹	6,9290 10 ⁻⁰⁵	5,5025 10 ⁻⁰⁹	3,0436 10 ⁻⁰⁹	6,7956 10 ⁻⁰⁵	6,5815 10 ⁻⁰⁵	6,0085 10 ⁻⁰⁹	6,1164 10 ⁻⁰⁹	4,1201 10 ⁻⁰⁹	3,9809 10 ⁻⁰⁹	
8.192	3,3974 10 ⁻⁰⁵	2,4379 10 ⁻⁰⁹	3,4650 10 ⁻⁰⁵	1,3756 10 ⁻⁰⁹	7,6062 10 ⁻¹⁰	3,3973 10 ⁻⁰⁵	3,2903 10 ⁻⁰⁵	1,5023 10 ⁻⁰⁹	1,5293 10 ⁻⁰⁹	1,0302 10 ⁻⁰⁹	9,9525 10 ⁻¹⁰	
16.384	1,6986 10 ⁻⁰⁵	6,0947 10 ⁻¹⁰	1,7326 10 ⁻⁰⁵	3,4390 10 ⁻¹⁰	1,9012 10 ⁻¹⁰	1,6985 10 ⁻⁰⁵	1,6450 10 ⁻⁰⁵	3,7561 10 ⁻¹⁰	3,8236 10 ⁻¹⁰	2,5756 10 ⁻¹⁰	2,4882 10 ⁻¹⁰	
32.768	8,4925 10 ⁻⁰⁶	1,5237 10 ⁻¹⁰	8,6634 10 ⁻⁰⁶	8,5973 10 ⁻¹¹	4,7525 10 ⁻¹¹	8,4924 10 ⁻⁰⁶	8,2249 10 ⁻⁰⁶	9,3905 10 ⁻¹¹	9,5593 10 ⁻¹¹	6,4393 10 ⁻¹¹	6,2204 10 ⁻¹¹	
65.536	4,2461 10 ⁻⁰⁶	3,8092 10 ⁻¹¹	4,3318 10 ⁻⁰⁶	2,1493 10 ⁻¹¹	1,1881 10 ⁻¹¹	4,2461 10 ⁻⁰⁶	4,1124 10 ⁻⁰⁶	2,3477 10 ⁻¹¹	2,3899 10 ⁻¹¹	1,6098 10 ⁻¹¹	1,5551 10 ⁻¹¹	
131.072	2,1231 10 ⁻⁰⁶	9,5230 10 ⁻¹²	2,1659 10 ⁻⁰⁶	5,3733 10 ⁻¹²	2,9701 10 ⁻¹²	2,1230 10 ⁻⁰⁶	2,0562 10 ⁻⁰⁶	5,8692 10 ⁻¹²	5,9748 10 ⁻¹²	4,0247 10 ⁻¹²	3,8878 10 ⁻¹²	
262.144	1,0615 10 ⁻⁰⁶	2,3807 10 ⁻¹²	1,0830 10 ⁻⁰⁶	1,3433 10 ⁻¹²	7,4251 10 ⁻¹³	1,0615 10 ⁻⁰⁶	1,0281 10 ⁻⁰⁶	1,4673 10 ⁻¹²	1,4937 10 ⁻¹²	1,0062 10 ⁻¹²	9,7195 10 ⁻¹³	
524.288	5,3076 10 ⁻⁰⁷	5,9519 10 ⁻¹³	5,4148 10 ⁻⁰⁷	3,3583 10 ⁻¹³	1,8563 10 ⁻¹³	5,3076 10 ⁻⁰⁷	5,1404 10 ⁻⁰⁷	3,6683 10 ⁻¹³	3,7342 10 ⁻¹³	2,5154 10 ⁻¹³	2,4299 10 ⁻¹³	
1.048.576	2,6538 10 ⁻⁰⁷	1,4880 10 ⁻¹³	2,7074 10 ⁻⁰⁷	8,3958 10 ⁻¹⁴	4,6407 10 ⁻¹⁴	2,6538 10 ⁻⁰⁷	2,5702 10 ⁻⁰⁷	9,1707 10 ⁻¹⁴	9,3356 10 ⁻¹⁴	6,2886 10 ⁻¹⁴	6,0747 10 ⁻¹⁴	

APÊNDICE E – RESULTADOS PARA O PROBLEMA E

Tabela E.1: Média da norma l_1 dos erros verdadeiros (E) para o Problema E

malha	L												
N	MAK	MHK	MAT	LTMH	TKMH	KG2P	KG3P	LK2M	KG4P	KG6P	DKID	ADID	
2	1,3355 10^{00}	1,3078 10^{00}	1,3304 10^{00}	1,3261 10^{00}	1,3365 10^{00}	1,3322 10^{00}	1,3322 10^{00}	1,3317 10^{00}	1,3322 10^{00}	1,3322 10^{00}	1,3322 10^{00}	1,3318 10^{00}	
4	2,1763 10^{-01}	2,2180 10^{-01}	3,2734 10^{-01}	2,7431 10^{-01}	2,7664 10^{-01}	2,6057 10^{-01}	2,6057 10^{-01}	2,7204 10^{-01}	2,6057 10^{-01}	2,6057 10^{-01}	2,6057 10^{-01}	3,2716 10^{-01}	
8	4,0084 10^{-02}	1,2710 10^{-01}	1,0692 10^{-01}	1,1303 10^{-01}	4,6592 10^{-02}	6,1069 10^{-02}	6,1069 10^{-02}	8,3833 10^{-02}	6,1069 10^{-02}	6,1069 10^{-02}	6,1069 10^{-02}	6,9102 10^{-02}	
16	4,3411 10^{-03}	6,6306 10^{-02}	1,5224 10^{-02}	3,6798 10^{-02}	4,7549 10^{-03}	1,0135 10^{-02}	1,0135 10^{-02}	1,2429 10^{-02}	1,0135 10^{-02}	1,0135 10^{-02}	1,0135 10^{-02}	1,1186 10^{-02}	
32	2,0139 10^{-03}	1,6389 10^{-02}	3,9323 10^{-03}	8,2736 10^{-03}	2,7340 10^{-03}	2,2254 10^{-03}	2,2254 10^{-03}	2,7484 10^{-03}	2,2254 10^{-03}	2,2254 10^{-03}	2,2254 10^{-03}	2,6393 10^{-03}	
64	7,9961 10^{-04}	6,2329 10^{-03}	9,9821 10^{-04}	2,1986 10^{-03}	1,1041 10^{-03}	4,6229 10^{-04}	4,6229 10^{-04}	6,0422 10^{-04}	4,6229 10^{-04}	4,6229 10^{-04}	4,6229 10^{-04}	5,9526 10^{-04}	
128	2,4755 10^{-04}	1,5936 10^{-03}	2,5057 10^{-04}	5,8018 10^{-04}	3,3989 10^{-04}	9,9839 10^{-05}	9,9839 10^{-05}	1,3809 10^{-04}	9,9839 10^{-05}	9,9839 10^{-05}	9,9839 10^{-05}	1,3745 10^{-04}	
256	6,8142 10^{-05}	4,1208 10^{-04}	6,2708 10^{-05}	1,4966 10^{-04}	9,3299 10^{-05}	2,2736 10^{-05}	2,2736 10^{-05}	3,2767 10^{-05}	2,2736 10^{-05}	2,2736 10^{-05}	2,2736 10^{-05}	3,2724 10^{-05}	
512	1,7839 10^{-05}	1,0524 10^{-04}	1,5681 10^{-05}	3,8045 10^{-05}	2,4377 10^{-05}	5,3897 10^{-06}	5,3897 10^{-06}	7,9650 10^{-06}	5,3897 10^{-06}	5,3897 10^{-06}	5,3897 10^{-06}	7,9622 10^{-06}	
1.024	4,5610 10^{-06}	2,6619 10^{-05}	3,9205 10^{-06}	9,5936 10^{-06}	6,2252 10^{-06}	1,3096 10^{-06}	1,3096 10^{-06}	1,9625 10^{-06}	1,3096 10^{-06}	1,3096 10^{-06}	1,3096 10^{-06}	1,9623 10^{-06}	
2.048	1,1529 10^{-06}	6,6957 10^{-06}	9,8015 10^{-07}	2,4089 10^{-06}	1,5727 10^{-06}	3,2262 10^{-07}	3,2262 10^{-07}	4,8701 10^{-07}	3,2262 10^{-07}	3,2262 10^{-07}	3,2262 10^{-07}	4,8700 10^{-07}	
4.096	2,8983 10^{-07}	1,6792 10^{-06}	2,4504 10^{-07}	6,0357 10^{-07}	3,9521 10^{-07}	8,0053 10^{-08}	8,0053 10^{-08}	1,2130 10^{-07}	8,0053 10^{-08}	8,0053 10^{-08}	8,0053 10^{-08}	1,2130 10^{-07}	
8.192	7,2655 10^{-08}	4,2046 10^{-07}	6,1260 10^{-08}	1,5106 10^{-07}	9,9058 10^{-08}	1,9938 10^{-08}	1,9938 10^{-08}	3,0268 10^{-08}	1,9938 10^{-08}	1,9938 10^{-08}	1,9938 10^{-08}	3,0268 10^{-08}	
16.384	1,8189 10^{-08}	1,0520 10^{-07}	1,5315 10^{-08}	3,7786 10^{-08}	2,4796 10^{-08}	4,9750 10^{-09}	4,9750 10^{-09}	7,5600 10^{-09}	4,9750 10^{-09}	4,9750 10^{-09}	4,9750 10^{-09}	7,5599 10^{-09}	
32.768	4,5503 10^{-09}	2,6310 10^{-08}	3,8287 10^{-09}	9,4490 10^{-09}	6,2031 10^{-09}	1,2426 10^{-09}	1,2426 10^{-09}	1,8891 10^{-09}	1,2426 10^{-09}	1,2426 10^{-09}	1,2426 10^{-09}	1,8891 10^{-09}	
65.536	1,1380 10^{-09}	6,5788 10^{-09}	9,5718 10^{-10}	2,3626 10^{-09}	1,5513 10^{-09}	3,1049 10^{-10}	3,1049 10^{-10}	4,7216 10^{-10}	3,1049 10^{-10}	3,1049 10^{-10}	3,1049 10^{-10}	4,7216 10^{-10}	
131.072	2,8454 10^{-10}	1,6449 10^{-09}	2,3930 10^{-10}	5,9069 10^{-10}	3,8788 10^{-10}	7,7604 10^{-11}	7,7604 10^{-11}	1,1803 10^{-10}	7,7604 10^{-11}	7,7604 10^{-11}	7,7604 10^{-11}	1,1803 10^{-10}	
262.144	7,1141 10^{-11}	4,1124 10^{-10}	5,9824 10^{-11}	1,4768 10^{-10}	9,6977 10^{-11}	1,9399 10^{-11}	1,9399 10^{-11}	2,9505 10^{-11}	1,9399 10^{-11}	1,9399 10^{-11}	1,9399 10^{-11}	2,9505 10^{-11}	
524.288	1,7786 10^{-11}	1,0281 10^{-10}	1,4956 10^{-11}	3,6920 10^{-11}	2,4245 10^{-11}	4,8494 10^{-12}	4,8494 10^{-12}	7,3760 10^{-12}	4,8494 10^{-12}	4,8494 10^{-12}	4,8494 10^{-12}	7,3760 10^{-12}	
1.048.576	4,4466 10^{-12}	2,5703 10^{-11}	3,7390 10^{-12}	9,2301 10^{-12}	6,0614 10^{-12}	1,2123 10^{-12}	1,2123 10^{-12}	1,8440 10^{-12}	1,2123 10^{-12}	1,2123 10^{-12}	1,2123 10^{-12}	1,8440 10^{-12}	

APÊNDICE F – RESULTADOS PARA O ESQUEMA HÍBRIDO

Tabela F.1: Erro percentual da condutividade térmica do Problema D calculada com o esquema MAk para malha $N = 16$

$x(m)$	$T^{ex}(P)$	$T(P)$	$k^{ex}(P)$	$k(P)$	$\varepsilon_{MAk}(\%)$
0,00000	0,00000	0,00000	100,00000	100,00000	0,00000
0,03125	0,00106	0,00113	100,10633	100,11351	0,00717
0,09375	0,00318	0,00340	100,31899	100,34039	0,02134
0,15625	0,00530	0,00566	100,53165	100,56728	0,03544
0,21875	0,00742	0,00791	100,74431	100,79416	0,04949
0,28125	0,00952	0,01016	100,95696	101,02104	0,06347
0,34375	0,01163	0,01240	101,16962	101,24793	0,07740
0,40625	0,01373	0,01464	101,38228	101,47481	0,09127
0,46875	0,01582	0,01687	101,59494	101,70170	0,10508
0,53125	0,11631	0,02129	1,12334	1,02152	-9,06425
0,59375	0,28968	0,22126	1,33600	1,24765	-6,61300
0,65625	0,43739	0,38799	1,54866	1,47401	-4,82016
0,71875	0,56606	0,53093	1,76132	1,70051	-3,45239
0,78125	0,68005	0,65602	1,97398	1,92710	-2,37475
0,84375	0,78236	0,76721	2,18664	2,15375	-1,50389
0,90625	0,87517	0,86729	2,39929	2,38045	-0,78556
0,96875	0,96010	0,95827	2,61195	2,60717	-0,18294
1,00000	1,00000	1,00000	2,71828	2,71828	0,00000

Tabela F.2: Erro percentual da condutividade térmica do Problema D calculada com o esquema MHk para malha $N = 16$

$x(m)$	$T^{ex}(P)$	$T(P)$	$k^{ex}(P)$	$k(P)$	$\varepsilon_{MHk}(\%)$
0,00000	0,00000	0,00000	100,00000	100,00000	0,00000
0,03125	0,00106	0,00107	100,10633	100,10658	0,00025
0,09375	0,00318	0,00319	100,31899	100,31962	0,00063
0,15625	0,00530	0,00531	100,53165	100,53266	0,00101
0,21875	0,00742	0,00743	100,74431	100,74570	0,00139
0,28125	0,00952	0,00954	100,95696	100,95875	0,00176
0,34375	0,01163	0,01165	101,16962	101,17179	0,00214
0,40625	0,01373	0,01375	101,38228	101,38483	0,00251
0,46875	0,01582	0,01585	101,59494	101,59787	0,00288
0,53125	0,11631	0,11212	1,12334	1,11865	-0,41760
0,59375	0,28968	0,28727	1,33600	1,33278	-0,24080
0,65625	0,43739	0,43607	1,54866	1,54661	-0,13218
0,71875	0,56606	0,56546	1,76132	1,76025	-0,06069
0,78125	0,68005	0,67994	1,97398	1,97376	-0,01116
0,84375	0,78236	0,78261	2,18664	2,18717	0,02457
0,90625	0,87517	0,87569	2,39929	2,40052	0,05119
0,96875	0,96010	0,96081	2,61195	2,61382	0,07154
1,00000	1,00000	1,00000	2,71828	2,71828	0,00000

Tabela F.3: Erro percentual da condutividade térmica do Problema D calculada com o esquema Híbrido para malha $N = 16$

$x(m)$	$T^{ex}(P)$	$T(P)$	$k^{ex}(P)$	$k(P)$	$\mathcal{E}_{Hibrido}(\%)$
0,00000	0,00000	0,00000	100,00000	100,00000	0,00000
0,03125	0,00106	0,00107	100,10633	100,10694	0,00061
0,09375	0,00318	0,00320	100,31899	100,32071	0,00171
0,15625	0,00530	0,00533	100,53165	100,53447	0,00281
0,21875	0,00742	0,00745	100,74431	100,74824	0,00391
0,28125	0,00952	0,00957	100,95696	100,96201	0,00500
0,34375	0,01163	0,01169	101,16962	101,17577	0,00608
0,40625	0,01373	0,01380	101,38228	101,38954	0,00716
0,46875	0,01582	0,01591	101,59494	101,60331	0,00824
0,53125	0,11631	0,11247	1,12334	1,11904	-0,38295
0,59375	0,28968	0,28688	1,33600	1,33227	-0,27948
0,65625	0,43739	0,43544	1,54866	1,54564	-0,19487
0,71875	0,56606	0,56481	1,76132	1,75911	-0,12532
0,78125	0,68005	0,67937	1,97398	1,97264	-0,06751
0,84375	0,78236	0,78218	2,18664	2,18622	-0,01886
0,90625	0,87517	0,87540	2,39929	2,39984	0,02256
0,96875	0,96010	0,96068	2,61195	2,61347	0,05819
1,00000	1,00000	1,00000	2,71828	2,71828	0,00000

APÊNDICE G – FORMA NUMÉRICA PARA O CÁLCULO DE k

Nesta seção são apresentados os esquemas de cálculo de k sob sua forma numérica para os problemas da Tab. 4.1. Assim, determina-se o valor para k_e (utilizado na Eq. (4.14)), que neste contexto será representado por $k_e(P)$, ou seja, condutividade térmica da face “e” para o nó P . Como dito anteriormente, o valor de $k_w(P)$ (utilizado na Eq. (4.13)) é igual ao valor de $k_e(P - 1)$.

A forma numérica para cálculo de $k_e(P)$ deve ser implementada no item 9 do algoritmo da solução (ver seção 4.5).

Esquema MAk

O esquema MAk, definido na seção 2.3.1, para os nós $P = 1$ a $P = N - 1$ de todos os problemas de teste é definido por:

$$k_e(P) = \frac{k_P(P) + k_P(P + 1)}{2} , \quad (\text{G.1})$$

onde $k_P(P)$ e $k_P(P + 1)$ são as condutividades térmicas nos nós P e E , respectivamente.

Esquema MHk

O esquema MHk, definido na seção 2.3.2, para os nós $P = 1$ a $P = N - 1$ de todos os problemas de teste é definido por:

$$k_e(P) = \frac{2 k_P(P) k_P(P + 1)}{k_P(P) + k_P(P + 1)} . \quad (\text{G.2})$$

Esquema MAT

A definição do esquema MAT foi feita na seção 2.3.3. Para os nós $P = 1$ a $P = N - 1$ de todos os problemas de teste, tem-se:

$$k_e(P) = k_P(T_e) , \quad (\text{G.3})$$

onde T_e é a temperatura na face “e” e é dada por:

$$T_e = \frac{T(P) + T(P+1)}{2}, \quad (\text{G.4})$$

onde $T(P)$ e $T(P+1)$ são as temperaturas nos nós P e E , respectivamente.

Esquema LTMH

O esquema LTMH foi definido na seção 2.3.4. Este esquema calcula a condutividade térmica através da média harmônica de k , considerando um perfil linear com inclinação constante entre P e E . Para $P = 1$ a $P = N - 1$, tem-se:

$$k_e(P) = \frac{2 k_a(P) k_b(P)}{k_a(P) + k_b(P)}, \quad (\text{G.5})$$

onde $k_a(P)$ e $k_b(P)$ são dados por:

$$k_a(P) = k(T_a) \quad (\text{G.6})$$

$$k_b(P) = k(T_b) \quad (\text{G.7})$$

onde $k(T_a)$ e $k(T_b)$ são, respectivamente, as funções para a condutividade térmica em pontos intermediários, “a” e “b”, localizados entre nós consecutivos da face “e”, conforme mostra a Fig. 2.3. As temperaturas T_a e T_b utilizadas nas Eqs. (G.6) e (G.7) são calculadas fazendo

$$T_a = \frac{3 T(P) + T(P+1)}{4} \quad (\text{G.8})$$

$$T_b = \frac{T(P) + 3 T(P+1)}{4} \quad (\text{G.9})$$

Esquema TkMH

A condutividade térmica na face “e” ($k_e(P)$) para o esquema TkMH, definido na seção 2.3.5, é calculada através da média harmônica de k (ver Eq. (G.5)), mas considerando um perfil linear com inclinações diferentes entre os nós P e E . Assim, as expressões para calcular $k_a(P)$ e $k_b(P)$ são diferentes do esquema LTMH. Para $P = 1$ a $P = N - 1$, tem-se:

$$k_a(P) = k \left(\frac{T(P) + T_e}{2} \right) \quad (\text{G.10})$$

$$k_b(P) = k \left(\frac{T_e + T(P+1)}{2} \right) \quad (\text{G.11})$$

onde as condutividades térmicas $k_a(P)$ e $k_b(P)$ são avaliadas em pontos intermediários, “a” e “b”, localizados entre nós consecutivos da face “e”, conforme mostra a Fig. 2.3. O valor de T_e é dada por

$$T_e = \frac{k_P(P)}{k_P(P) + k_P(P+1)} T(P) + \frac{k_P(P+1)}{k_P(P) + k_P(P+1)} T(P+1) . \quad (\text{G.12})$$

Esquema KG2P

O esquema KG2P foi apresentado na seção 2.3.6.1. Neste esquema, o valor da condutividade térmica na face “e”, $k_e(P)$, para os nós $P = 1$ a $P = N - 1$ é dado por:

$$k_e(P) = \frac{1}{2} \left[k \left(\frac{T(P+1) + T(P)}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{T(P+1) - T(P)}{2} \right) + k \left(\frac{T(P+1) + T(P)}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{T(P+1) - T(P)}{2} \right) \right] . \quad (\text{G.13})$$

Para os problemas com mudança brusca da condutividade na face do VC (número de volumes pares), Problema C e Problema D, $k_e(P)$ é dado por:

$$k_e(P) = \frac{1}{2} \left[k_1 \left(\frac{T(P+1) + T(P)}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{T(P+1) - T(P)}{2} \right) + k_2 \left(\frac{T(P+1) + T(P)}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{T(P+1) - T(P)}{2} \right) \right] , \quad (\text{G.14})$$

onde k_1 e k_2 são as funções condutividade térmica associadas aos nós P e $P+1$, respectivamente.

Esquema KG3P

O valor da condutividade térmica na face “e”, $k_e(P)$, para o esquema KG3P que foi apresentado na seção 2.3.6.2, para os nós $P = 1$ a $P = N - 1$ é dado por:

$$k_e(P) = \left[\frac{5}{18}k \left(\frac{T(P+1)+T(P)}{2} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \frac{T(P+1)-T(P)}{2} \right) + \frac{8}{18}k \left(\frac{T(P+1)+T(P)}{2} \right) + \frac{5}{18}k \left(\frac{T(P+1)+T(P)}{2} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \frac{T(P+1)-T(P)}{2} \right) \right] \quad (\text{G.15})$$

Para os problemas com mudança brusca da condutividade na face do VC (número de volumes pares), Problema C e Problema D, $k_e(P)$ é dado por:

$$k_e(P) = \left[\frac{5}{18}k_1 \left(\frac{T(P+1)+T(P)}{2} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \frac{T(P+1)-T(P)}{2} \right) + \frac{8}{18}k_2 \left(\frac{T(P+1)+T(P)}{2} \right) + \frac{5}{18}k_2 \left(\frac{T(P+1)+T(P)}{2} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \frac{T(P+1)-T(P)}{2} \right) \right] \quad (\text{G.16})$$

onde k_1 e k_2 são as funções condutividade térmica associadas aos nós P e $P+1$, respectivamente.

Esquema Lk2M

O esquema Lk2M foi definido na seção 3.1. Este esquema aproxima a condutividade térmica na face do VC quando existem dois materiais diferentes, sendo cada um deles dependente da temperatura. Considera-se que a mudança brusca na condutividade térmica ocorre na interface, conforme apresenta a Fig. 3.1. Dessa forma, a condutividade térmica $k_e(P)$, para $P = 1$ a $P = N - 1$, é calculada por:

$$k_e(P) = \frac{k_a(P) (T_e - T(P)) + k_b(P) (T(P+1) - T_e)}{T(P+1) - T(P)}, \quad (\text{G.17})$$

onde $k_a(P)$ e $k_b(P)$ são calculados nas Eqs. (G.10) e (G.11), respectivamente, e a temperatura T_e é dada pela Eq. (G.12).

No Problema C, a Eq. (G.17) para a condutividade térmica $k_e(P)$ é equivalente ao valor obtido pelo esquema MHk, conforme Eq. (G.2).

Esquema KG4P

O esquema KG4P foi apresentado na seção 3.2, cuja definição foi baseada em problemas com dois meios diferentes. Este esquema utiliza a transformação local de Kirchhoff fazendo a

integração do numerador da Eq. (3.7) pela quadratura de Gauss com dois pontos de integração em cada um dos dois meios. Assim, a condutividade térmica $k_e(P)$, para os nós $P = 1$ a $P = N - 1$ é calculada por:

$$k_e(P) = \frac{\int_{T(P)}^{T_e} k_1(T) dx + \int_{T_e}^{T(P+1)} k_2(T) dx}{T(P+1) - T(P)}, \quad (\text{G.18})$$

onde $k_1(T)$ e $k_2(T)$ representam as funções condutividade térmica para cada um dos materiais envolvidos e a temperatura T_e é obtida da Eq. (G.12). Assim, a integração de cada um dos membros da Eq. (G.18) é feita por:

$$\begin{aligned} \int_{T(P)}^{T_e} k_1(T) dx \approx [T_e - T(P)] & \left[\frac{1}{2} k_1 \left(\frac{T_e + T(P)}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{T_e - T(P)}{2} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} k_1 \left(\frac{T_e + T(P)}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{T_e - T(P)}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{G.19})$$

$$\begin{aligned} \int_{T_e}^{T(P+1)} k_2(T) dx \approx [T(P+1) - T_e] & \left[\frac{1}{2} k_2 \left(\frac{T(P+1) + T_e}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{T(P+1) - T_e}{2} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} k_2 \left(\frac{T(P+1) + T_e}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{T(P+1) - T_e}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{G.20})$$

Esquema KG6P

O esquema KG6P foi apresentado na seção 3.3. Este esquema, também, utiliza a transformação local de Kirchhoff fazendo a integração do numerador da Eq. (3.7) pela quadratura de Gauss com três pontos de integração em cada um dos dois meios. Assim, a condutividade térmica $k_e(P)$ é calculada pela Eq. (G.18).

Assim, para os nós $P = 1$ a $P = N - 1$, a integração de cada um dos membros da Eq. (G.18), para o esquema KG6P, é feita por:

$$\begin{aligned} \int_{T(P)}^{T_e} k_1(T) dx \approx [T_e - T(P)] & \left[\frac{5}{18} k_1 \left(\frac{T_e + T(P)}{2} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \frac{T_e - T(P)}{2} \right) + \frac{8}{18} k_1 \left(\frac{T_e + T(P)}{2} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{5}{18} k_1 \left(\frac{T_e + T(P)}{2} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \frac{T_e - T(P)}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{G.21})$$

$$\int_{T_e}^{T(P+1)} k_2(T) dx \approx [T(P+1) - T_e] \left[\frac{5}{18} k_2 \left(\frac{T(P+1) + T_e}{2} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \frac{T(P+1) - T_e}{2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{8}{18} k_2 \left(\frac{T(P+1) + T_e}{2} \right) + \frac{5}{18} k_2 \left(\frac{T(P+1) + T_e}{2} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \frac{T(P+1) - T_e}{2} \right) \right] \quad (\text{G.22})$$

Esquema AD1D

O esquema AD1D foi apresentado na seção 3.4 para calcular a condutividade térmica na face do VC em problemas de advecção-difusão utilizando a solução exata como uma aproximação para a temperatura T_e na interface. Este esquema é utilizado somente na solução do Problema E.

Para os nós $P = 1$ a $P = N - 1$, a temperatura na face “e”, T_e , é dada por:

$$T_e = T(P) + \frac{\exp\left(\frac{F h}{2 k(T_e)}\right) - 1}{\exp\left(\frac{F h}{k(T_e)}\right) - 1} (T(P+1) - T(P)) . \quad (\text{G.23})$$

Pode-se observar da Eq. (G.23) que a solução para T_e é dependente dela mesma porque é necessário calcular a condutividade térmica $k_e(P) = k(T_e)$. Neste caso, o cálculo de T_e deve ser feito por um processo iterativo bastando, para tanto, poucas iterações. Sugere-se como valor inicial para a iteração de T_e utilizar a Eq. (G.12).

Após encontrar T_e na Eq.(G.23), pode-se calcular as condutividades térmicas, $k_a(P)$ e $k_b(P)$, pelas Eqs. (G.10) e (G.11), respectivamente, para dois pontos intermediários, “a” e “b”, localizados entre nós consecutivos (ver Fig. 2.3). A condutividade térmica $k_e(P)$ na interface é calculada através da Eq.(G.17).

Esquema DK1D

O esquema DK1D foi apresentado na seção 3.5. O cálculo da condutividade térmica na face do VC é feito com base na solução analítica para dois meios com condutividades térmicas diferentes e dependentes da temperatura.

Neste esquema, a condutividade térmica $k_e(P)$, para os nós $P = 1$ a $P = N - 1$ é dada por:

$$k_e(P) = \frac{2}{(T(P+1) - T(P)) (k_{1_{ref}} + k_{2_{ref}})} \left[-k_{2_{ref}} \int_{T_{ref}}^{T(P)} k_1(T_1) dT_1 + k_{1_{ref}} \int_{T_{ref}}^{T(P+1)} k_2(T_2) dT_2 \right]. \quad (G.24)$$

Na Eq. (G.24), os valores para $k_{1_{ref}}$, $k_{2_{ref}}$ e T_{ref} devem utilizar como referência a temperatura T_e . As integrais das funções condutividade térmica $k_1(T_1)$ e $k_2(T_2)$ são realizadas analiticamente.

A expressão numérica obtida com o esquema DK1D para a condutividade térmica $k_e(P)$ do Problema A é dada por:

$$\text{Problema A} \begin{cases} k_1(T_1) = \exp(T) \\ k_2(T_2) = \exp(T) \\ k_{1_{ref}} = \exp(T_e) \\ k_{2_{ref}} = \exp(T_e) \end{cases}$$

$$k_e(P) = \frac{\exp(T(P+1)) - \exp(T(P))}{T(P+1) - T(P)}. \quad (G.25)$$

A expressão numérica obtida com o esquema DK1D para a condutividade térmica $k_e(P)$ do Problema B é dada por:

$$\text{Problema B} \begin{cases} k_1(T_1) = T^3 \\ k_2(T_2) = T^3 \\ k_{1_{ref}} = T_e^3 \\ k_{2_{ref}} = T_e^3 \end{cases}$$

$$k_e(P) = \frac{1}{4} [T(P) + T(P+1)] [(T(P))^2 + (T(P+1))^2]. \quad (G.26)$$

A expressão numérica obtida com o esquema DK1D para a condutividade térmica $k_e(P)$ do Problema C é dada por:

$$\text{Problema C} \begin{cases} k_1(T_1) = k_P(P) \\ k_2(T_2) = k_P(P+1) \\ k_{1_{ref}} = k_P(P) \\ k_{2_{ref}} = k_P(P+1) \end{cases}$$

$$k_e(P) = \frac{2 k_P(P) k_P(P+1)}{k_P(P) + k_P(P+1)}. \quad (\text{G.27})$$

A Eq. (G.27) é equivalente à obtida com o esquema MHk.

A expressão numérica obtida com o esquema DK1D para a condutividade térmica $k_e(P)$ do Problema D é dada por:

$$\text{Problema D} \left\{ \begin{array}{l} k_1(T_1) = C_1 \exp(T) \\ k_2(T_2) = C_2 \exp(T) \\ k_{1_{ref}} = C_1 \exp(T_e) \\ k_{2_{ref}} = C_2 \exp(T_e) \end{array} \right.$$

$$k_e(P) = \frac{2 C_1 C_2 \exp(T(P+1)) - \exp(T(P))}{C_1 + C_2 T(P+1) - T(P)}, \quad (\text{G.28})$$

onde $C_1 = C_2 = 100$ se $x_P(P+1) < 0,5$. Se $x(P) > 0,5 \Rightarrow C_1 = C_2 = 1$ e, quando $x_e = 0,5 \Rightarrow C_1 = 100$ e $C_2 = 1$.

A expressão numérica obtida com o esquema DK1D para a condutividade térmica $k_e(P)$ do Problema E é dada por:

$$\text{Problema E} \left\{ \begin{array}{l} k_1(T_1) = 0,01 + T^2 \\ k_2(T_2) = 0,01 + T^2 \\ k_{1_{ref}} = 0,01 + T_e^2 \\ k_{2_{ref}} = 0,01 + T_e^2 \end{array} \right.$$

$$k_e(P) = \frac{1}{300} \frac{100 (T(P+1))^3 - 100 (T(P))^3 + 3 T(P+1) - 3 T(P)}{T(P+1) - T(P)}. \quad (\text{G.29})$$